

МИНИСТЕРСТВО СПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЕЛИКОЛУКСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ И СПОРТА»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе ВЛГАФК

Е.Ю. Андриянова

09.2025 г.

Кафедра естественно-научных дисциплин

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ»

основной образовательной программы

среднего профессионального образования по специальности

49.02.01 Физическая культура

направленность - преподавание физической культуры по основным общеобразовательным

программам

квалификация - педагог по физической культуре и спорту

Форма обучения очная

Автор-разработчик:

Алексеева Ирина Викторовна, старший преподаватель кафедры естественно-научных
дисциплин

Великие Луки 2025

Заведующий кафедрой естественно-научных дисциплин
Челноков Андрей Алексеевич, доктор биологических наук, доцент

_____  _____ (подпись)

Заведующая библиотекой ФГБОУ ВО «ВЛГАФК»:
Орлова Виолетта Викторовна

_____  _____ (подпись)

Рецензенты:

Гладченко Денис Александрович, кандидат биологических наук, старший преподаватель кафедры естественно-научных дисциплин ФГБОУ ВО «ВЛГАФК»

Капустина Ольга Викторовна, учитель математики МОУ «Переслегинская гимназия»

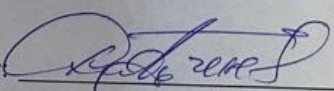
РЕЦЕНЗИЯ
на фонд оценочных средств по дисциплине «Математические методы решения
профессиональных задач»
по специальности 49.02.01 Физическая культура
направленность – преподавание физической культуры по основным
общеобразовательным программам
ФГБОУ ВО «Великолукская государственная академия физической культуры и
спорта»

Представленный на рецензию фонд оценочных средств (ФОС) является неотъемлемой частью рабочей программы дисциплины «Математические методы решения профессиональных задач». ФОС предназначен для проведения текущей и промежуточной аттестации и представляет собой совокупность материалов для установления уровня и качества достижения обучающимися результатов обучения – этапы формирования компетенций, показатели и критерии оценивания компетенций на этапе изучения дисциплины, перечень вопросов для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания, перечень тестовых заданий для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания и умения, перечень практических заданий (ситуационных задач) на зачете, необходимых для оценки умений и опыта деятельности.

Задачами ФОС являются контроль и управление процессом приобретения обучающимися знаний, умений, навыков, то есть набора компетенций, заявленных в образовательной программе по специальности 49.02.01 Физическая культура, направленность – преподавание физической культуры по основным общеобразовательным программам.

Проведённый анализ ФОС показал, указанные материалы позволяют в полной мере оценить результаты освоения обучающимися учебной дисциплины «Математические методы решения профессиональных задач», а также оценить степень сформированности умений и навыков, заявленных в результатах обучения рабочей программы дисциплины. Вопросы и задания к зачету четко сформулированы, содержат изученный материал и терминологию по дисциплине «Математические методы решения профессиональных задач». Ответы на вопросы и выполнение заданий способны продемонстрировать уровень приобретенных знаний, умений и навыков, а также объем продуктивно освоенного материала.

Таким образом, фонд оценочных средств в составе рабочей программы дисциплины «Математические методы решения профессиональных задач» по специальности 49.02.01 Физическая культура, направленность – преподавание физической культуры по основным общеобразовательным программам соответствует содержанию указанной учебной дисциплины и может быть рекомендован к использованию в учебном процессе.

Рецензент:  Гладченко Денис Александрович, кандидат биологических наук, доцент кафедры естественно-научных дисциплин ФГБОУ ВО «ВЛГАФК»

Подпись доцента кафедры естественно-научных дисциплин ФГБОУ ВО «ВЛГАФК», Гладченко Д.А., удостоверяю

Начальник отдела кадров ФГБОУ ВО «ВЛГАФК»

29.08.

2026 года



Попланова И.Г.

ЭКСПЕРТНОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ
на фонд оценочных средств по дисциплине «Математические методы решения
профессиональных задач»
по специальности 49.02.01 Физическая культура
направленность – преподавание физической культуры по основным общеобразовательным
программам
ФГБОУ ВО «Великолукская государственная академия физической культуры и спорта»

Проведена экспертиза фонда оценочных средств (ФОС) рабочей программы дисциплины «Математические методы решения профессиональных задач» для обучающихся по специальности 49.02.01 Физическая культура, направленность – преподавание физической культуры по основным общеобразовательным программам, разработанного старшим преподавателем Алексеевой И.В.

В рабочей программе дисциплины представлены:

- перечень компетенций, которыми должны овладеть обучающиеся в результате освоения дисциплины с указанием этапов их формирования;
- описание показателей и критериев оценивания компетенций на этапе изучения дисциплины, описание шкал оценивания;
- перечень вопросов для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания;
- перечень тестовых заданий для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания и умения;
- перечень практических заданий (ситуационных задач) на зачете, необходимых для оценки умений и опыта деятельности.

На основании изложенного следует отметить, что:

1. Перечень формируемых компетенций соответствует ФГОС СПО по специальности 49.02.01 Физическая культура, направленность – преподавание физической культуры по основным общеобразовательным программам.

2. Показатели и критерии оценивания компетенций, а также шкалы оценивания в целом обеспечивают возможность проведения всесторонней оценки результатов обучения и уровня сформированности компетенций.

3. Контрольные задания и иные материалы оценки результатов освоения дисциплины соответствуют требованиям к составу оценочных средств, полноте по их количественному составу и позволяют объективно оценить результаты обучения, уровни сформированности компетенций.

4. По качеству оценочные средства ФОС в целом обеспечивают объективность и достоверность результатов при проведении оценивания.

5. Выполнение требований ФОС со стороны обучающегося позволяет обеспечить высокое качество его подготовки.

На основании изложенного можно сделать заключение, что представленный ФОС дисциплины «Математические методы решения профессиональных задач» для обучающихся по специальности 49.02.01 Физическая культура, направленность – преподавание физической культуры по основным общеобразовательным программам, согласуется с требованиями ФГОС и соответствующих профессиональных стандартов.

Рецензент: Кап Капустина Ольга Викторовна, учитель математики МОУ «Переслегинская гимназия»

Подпись учителя математики МОУ «Переслегинская гимназия», Капустиной О.В., удостоверяю

Директор МОУ «Переслегинская гимназия»

29.08. 2026 года



Казакова С.С.

Оглавление

АННОТАЦИЯ.....	5
1. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	7
2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ	9
3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ	9
4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	10
4.1. Распределение учебного времени по темам (разделам) и видам учебных занятий	10
5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ	19
5.1. Перечень примерных вопросов и заданий для организации самостоятельной работы обучающегося	19
5.2. Методические рекомендации к различным видам самостоятельной работы	26
5.3. Критерии оценки самостоятельной работы обучающегося	27
6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ	29
6.1. Показатели и критерии оценивания компетенций на этапе изучения дисциплины	29
6.2. Индикаторы достижения компетенций по уровню их сформированности	29
6.3. Соотношение индикаторов достижения со шкалой критериев их оценивания и уровнем их сформированности	29
6.4. Методические материалы для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих формирование компетенций в процессе освоения образовательной программы	30
6.4.1. Перечень вопросов для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания	31
6.4.2. Перечень вопросов для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания и умения	31
6.4.3. Перечень практических заданий на зачете, необходимых для оценки умений и опыта деятельности	36
6.5. Паспорт оценочных средств промежуточной аттестации	41
6.6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности при проведении промежуточной аттестации	42
7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	42
7.1. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	42
7.1.1. Рекомендуемая литература (основная).....	42
7.1.2. Рекомендуемая литература (дополнительная).....	43
7.2. Перечень ресурсов информационно-коммуникационной сети «Интернет»	43
7.3. Программное обеспечение	43
7.4. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы	43
7.4.1. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы, доступные в локальной сети.....	43
7.4.2. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы, доступные в сети «Интернет» (заключены договора с ФГБОУ ВО «ВЛГАФК»)	44
7.4.3. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы сети «Интернет» свободного доступа	44
8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	44
9. ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН лекций и практических занятий по дисциплине.....	45

ПРИЛОЖЕНИЕ №1	48
Примерные вопросы к контрольным работам в виде фонда оценочных средств для проведения диагностической работы с целью оценивания достижения результатов обучения	48
ПРИЛОЖЕНИЕ №2	54
Методические указания для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья....	54
ПРИЛОЖЕНИЕ №3	58
Тексты/конспекты лекций	58

АННОТАЦИЯ

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Планировать и анализировать физкультурно-спортивную работу.

ПК 2.4. Осуществлять исследовательскую и проектную деятельность в области физической культуры и спорта.

Код и наименование компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции/ показателя освоения компетенции
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам	Умения: - распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; - анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; - определять этапы решения задачи; - выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; - составлять план действия; - определять необходимые ресурсы; - владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; - реализовывать составленный план; - оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника) Знания: - актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить; - основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; - алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях; - методы работы в профессиональной и смежных сферах; - структуру плана для решения задач; - порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности
ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные	Умения: - определять задачи для поиска информации; - определять необходимые источники информации; - планировать процесс поиска; - структурировать получаемую информацию; - выделять наиболее значимое в перечне информации;

технологии для выполнения задач профессиональной деятельности	оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач. Знания: номенклатура информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемы структурирования информации; формат оформления результатов поиска информации, современные средства и устройства информатизации; порядок их применения и программное обеспечение в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств.
ПК 1.1. Планировать и анализировать физкультурно-спортивную работу.	Навыки: разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы. Умения: определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы; разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы. Знания: нормативные документы, регламентирующие организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; цели и задачи физкультурно-спортивной работы; направления, содержание, формы организации физкультурно-спортивной работы; требования к планированию и технологию планирования физкультурно-спортивной работы; показатели результативности физкультурно-спортивной работы.
ПК 2.4. Осуществлять исследовательскую и проектную деятельность в области физической культуры и спорта	Навыки: планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта. Умения: определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности. Знания: основы организации исследовательской и

	проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основы планирования и методику выполнения педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта.
--	--

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Учебная дисциплина «Математические методы решения профессиональных задач» относится к обязательной части общеобразовательного цикла учебного плана образовательной программы. В соответствии с учебным планом дисциплина изучается на втором курсе при обучении по очной форме. Вид промежуточной аттестации: 3 семестр - зачет.

Частично может быть реализована с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Промежуточная аттестация может быть реализована с применением дистанционных образовательных технологий.

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

<i>Вид учебной работы</i>	<i>Всего часов</i>	<i>Семестры</i>							
		1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Контактная работа преподавателей с обучающимися</i>	26			26					
<i>В том числе:</i>									
<i>Теоретическое обучение (лекции)</i>	10			10					
<i>Семинарские занятия</i>	-			-					
<i>Практические занятия</i>	16			16					
<i>Лабораторные работы</i>	-			-					
<i>Промежуточная аттестация</i>				Зач.					
<i>Самостоятельная работа обучающегося</i>	10			10					
<i>В том числе:</i>									
<i>Курсовая работа</i>	-			-					
<i>Расчётно-графические работы</i>	-			-					
<i>Рефераты</i>	-			-					

<i>Письменные самостоятельные работы</i>		2			2					
<i>Изучение теоретического материала</i>		2			2					
<i>Подготовка к текущей аттестации (контрольные работы, опросы и тестирования)</i>		2			2					
<i>Подготовка к промежуточной аттестации</i>		4			4					
Общая трудоемкость	часы	36			36					

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Распределение учебного времени по темам (разделам) и видам учебных занятий

№ п/п	Тема или раздел	Лекции	Семинарские занятия	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа обучающихся	Всего часов
1	Раздел 1. Элементы теории множеств и математической логики						
	Тема 1.1 Основные элементы теории множеств. Операции над множествами.	1	-	2	-	1	4
	Тема 1.2 Логические операции. Законы логики.	1	-	2	-	1	4
2	Раздел 2. Приближенные вычисления						
	Тема 2.1 Величины и их измерения.	1	-	2	-	1	4
	Тема 2.2 Приближенные вычисления.	1	-	2	-	2	5
	Контрольная работа № 1 на тему: «Элементы теории множеств и математической логики. Приближенные вычисления».		-	1	-		1

3	Раздел 3. Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики						
	Тема 3.1. Комбинаторика.	1	-	1	-	1	3
	Тема 3.2. Элементы теории вероятностей.	1	-	2	-	2	5
	Тема 3.3. Элементы математической статистики.	4	-	3	-	2	9
	Контрольная работа № 2 на тему: «Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики».		-	1	-		1
ИТОГО (в часах)		10	-	16	-	10	36

Темы и их краткое содержание

Второй курс

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ **Тема 1.1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.**

Лекция № 1 (1 час)

Множества. Основные понятия. Отношения между множествами. Операции над множествами.

Практическое занятие № 1(2 часа)

Применение элементов теории множеств для решения профессиональных задач.

Самостоятельная работа (1 час)

Закрепление теоретического материала. Операции над множествами.

Изучение темы направлено на приобретение:

знаний – актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить; основных источников информации и ресурсов для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмов выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методов работы в профессиональной и смежных сферах; структуры плана для решения задач; порядка оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемов структурирования информации; формата оформления результатов поиска информации, современных средств и устройств информатизации; порядка их применения и программного обеспечения в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств;

- нормативных документов, регламентирующих организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; целей и задач физкультурно-спортивной работы; направления, содержания, форм организации физкультурно-спортивной работы; требований к планированию и технологии планирования физкультурно-спортивной работы; показателей результативности физкультурно-спортивной работы;

- основ организации исследовательской и проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основ планирования и методики выполнения педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта;

умений – распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовывать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)

- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач;

- определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы; разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы;

- определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности;
- навыков/опыта деятельности* – разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы;
- планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта.

Тема 1.2. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ.

Лекция № 1 (1 час)

Простые и сложные высказывания. Основные логические операции. Таблицы истинности. Законы логики. Правила преобразования логических выражений.

Практическое занятие № 1(2 часа)

Обоснование истинности высказываний в профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа (1 час)

Закрепление теоретического материала. Решение задач.

Изучение темы направлено на приобретение:

знаний – актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить; основных источников информации и ресурсов для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмов выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методов работы в профессиональной и смежных сферах; структуры плана для решения задач; порядка оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемов структурирования информации; формата оформления результатов поиска информации, современных средств и устройств информатизации; порядка их применения и программного обеспечения в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств;

- нормативных документов, регламентирующих организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; целей и задач физкультурно-спортивной работы; направления, содержания, форм организации физкультурно-спортивной работы; требований к планированию и технологии планирования физкультурно-спортивной работы; показателей результативности физкультурно-спортивной работы;

- основ организации исследовательской и проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основ планирования и методики выполнения педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта;

умений – распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовывать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)

- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач;

- определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы;

разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы;

- определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности;

навыков/опыта деятельности – разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы;

- планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта.

Раздел 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Тема 2.1. ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЯ.

Лекция № 1 (1 час)

Понятие положительной скалярной величины. Классификация и основные характеристики измерения величин. Стандартные единицы величин и соотношения между ними. Единицы измерения величин, применяемые в профессиональной деятельности.

Практическое занятие № 1(2 часа)

Установление зависимостей между величинами, используемыми в профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа (1 час)

Закрепление теоретического материала. Решение задач.

Изучение темы направлено на приобретение:

знаний – актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить; основных источников информации и ресурсов для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмов выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методов работы в профессиональной и смежных сферах; структуры плана для решения задач; порядка оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемов структурирования информации; формата оформления результатов поиска информации, современных средств и устройств информатизации; порядка их применения и программного обеспечения в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств;

- нормативных документов, регламентирующих организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; целей и задач физкультурно-спортивной работы; направления, содержания, форм организации физкультурно-спортивной работы; требований к планированию и технологию планирования физкультурно-спортивной работы; показателей результативности физкультурно-спортивной работы;

- основ организации исследовательской и проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основ планирования и методики выполнения педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта;

умений – распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовывать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)

- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;

выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач;

- определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы; разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы;

- определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности;

навыков/опыта деятельности – разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы;

- планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта.

Тема 2.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Лекция № 1 (1 час)

Точные и приближенные значения величин. Точность приближенных значений величин. Абсолютная и относительная погрешности. Округление приближенных значений величин. Правила нахождения процентного соотношения. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью. Графическое представление результатов измерения величин.

Практическое занятие № 1(2 часа)

Решение задач на процентное соотношение величин. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью и их графическое представление.

Самостоятельная работа (2 часа)

Закрепление теоретического материала. Решение задач. Подготовка к контрольной работе № 1 на тему: «Элементы теории множеств и математической логики. Приближенные вычисления».

Изучение темы направлено на приобретение:

знаний – актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить; основных источников информации и ресурсов для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмов выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методов работы в профессиональной и смежных сферах; структуры плана для решения задач; порядка оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемов структурирования информации; формата оформления результатов поиска информации, современных средств и устройств информатизации; порядка их применения и программного обеспечения в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств;

- нормативных документов, регламентирующих организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; целей и задач физкультурно-спортивной работы; направления, содержания, форм организации физкультурно-спортивной работы; требований к планированию и технологии планирования физкультурно-спортивной работы; показателей результативности физкультурно-спортивной работы;

- основ организации исследовательской и проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основ планирования и методики выполнения педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта;

умений – распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовывать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)

- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач;

- определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы; разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы;

- определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности;

навыков/опыта деятельности – разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы;

- планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта.

Раздел 3. КОМБИНАТОРИКА, ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 3.1. КОМБИНАТОРИКА.

Лекция № 1 (1 час)

Основные комбинаторные конфигурации. Формулы комбинаторики. Правила комбинаторики. Типы комбинаторных задач.

Практическое занятие № 1(1 час)

Применение комбинаторики для решения профессиональных задач.

Самостоятельная работа (1 час)

Закрепление теоретического материала. Решение задач.

Изучение темы направлено на приобретение:

знаний – актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить; основных источников информации и ресурсов для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмов выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методов работы в профессиональной и смежных сферах; структуры плана для решения задач; порядка оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемов структурирования информации; формата оформления результатов поиска информации, современных средств и устройств информатизации; порядка их применения и программного обеспечения в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств;

- нормативных документов, регламентирующих организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; целей и задач физкультурно-спортивной работы; направления, содержания, форм организации физкультурно-спортивной работы; требований к планированию и технологии планирования физкультурно-спортивной работы; показателей результативности физкультурно-спортивной работы;

- основ организации исследовательской и проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основ планирования и методики выполнения

педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта;

умений – распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовывать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)

- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач;

- определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы; разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы;

- определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности;

навыков/опыта деятельности – разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы;

- планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта.

Тема 3.2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Лекция № 1 (1 час)

Виды событий. Произведение, сумма и разность событий. Случайное событие и его вероятность. Классическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные испытания. Формула Бернулли.

Практическое занятие № 1(2 часа)

Решение задач на нахождение вероятности событий. Применение основ теории вероятностей для решения профессиональных задач.

Самостоятельная работа (2 часа)

Закрепление теоретического материала. Решение задач.

Изучение темы направлено на приобретение:

знаний – актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить; основных источников информации и ресурсов для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмов выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методов работы в профессиональной и смежных сферах; структуры плана для решения задач; порядка оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемов структурирования информации; формата оформления результатов поиска информации, современных средств и устройств информатизации; порядка их применения и программного обеспечения в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств;

- нормативных документов, регламентирующих организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; целей и задач физкультурно-спортивной работы; направления,

содержания, форм организации физкультурно-спортивной работы; требований к планированию и технологию планирования физкультурно-спортивной работы; показателей результативности физкультурно-спортивной работы;

- основ организации исследовательской и проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основ планирования и методики выполнения педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта;

умений – распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовывать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)

- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач;

- определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы; разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы;

- определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности;

навыков/опыта деятельности – разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы;

- планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта.

Тема 3.3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Лекция № 1 (2 часа)

Основные понятия математической статистики. Методы описательной статистики.

Лекция № 2 (2 часа)

Методы проверки статистических гипотез.

Практическое занятие № 1(1час)

Проведение элементарной статистической обработки информации и результатов исследований.

Практическое занятие № 2(2 часа)

Применение статистических методов для решения профессиональных задач.

Самостоятельная работа (2 часа)

Закрепление теоретического материала. Решение задач. Подготовка к контрольной работе № 2 на тему: «Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики».

Изучение темы направлено на приобретение:

знаний – актуального профессионального и социального контекста, в котором приходится работать и жить; основных источников информации и ресурсов для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмов выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методов работы в профессиональной и

смежных сферах; структуры плана для решения задач; порядка оценки результатов решения задач профессиональной деятельности;

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемов структурирования информации; формата оформления результатов поиска информации, современных средств и устройств информатизации; порядка их применения и программного обеспечения в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств;

- нормативных документов, регламентирующих организацию физкультурно-спортивной работы в РФ; целей и задач физкультурно-спортивной работы; направления, содержания, форм организации физкультурно-спортивной работы; требований к планированию и технологию планирования физкультурно-спортивной работы; показателей результативности физкультурно-спортивной работы;

- основ организации исследовательской и проектной деятельности в области физической культуры и спорта; основ планирования и методики выполнения педагогического исследования и проектирования в области физической культуры и спорта;

умений – распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовывать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)

- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач;

- определять цель, задачи и содержание физкультурно-спортивной работы; разрабатывать документы планирования физкультурно-спортивной работы; оценивать результативность физкультурно-спортивной работы;

- определять тему, цель и задачи, планировать исследовательскую и проектную деятельность; осуществлять взаимодействие с руководителем, а также с другими участниками совместной проектной и исследовательской деятельности;

навыков/опыта деятельности – разработки общего плана физкультурно-спортивной работы; анализа и оценки физкультурно-спортивной работы;

- планирования, выполнения и представления исследовательской и/или проектной работы в области физической культуры и спорта.

5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

5.1. Перечень примерных вопросов и заданий для организации самостоятельной работы обучающегося

№ п/п	Тема/раздел	Виды и содержание самостоятельной работы	Трудоемкость, часов

1.	Раздел 1. Элементы теории множеств и математической логики	
	Тема 1.1. Основные элементы теории множеств. Операции над множествами.	<i>Работа с лекционным материалом.</i> <i>Вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля:</i> 1. Множества. Основные понятия. 2. Отношения между множествами. 3. Операции над множествами. <i>Решение задач:</i> 1. Если множество $M = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 4 \}$, то: а) $(2; 1) \in M$; б) $(-2; 2) \in M$; в) $(2; -2) \notin M$; г) $(1; 1) \notin M$. Какие из вышеприведенных высказываний истинны, а какие ложны? 2. Если множества $A \subset B \subset C$, то истинны ли высказывания: а) $A \cup B \subset C$; б) $C \setminus B = C \setminus A$; в) $B \setminus C = A \setminus C$? 3. Из 220 школьников 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол? <i>Рекомендованные источники литературы</i> 1. Математика и информатика: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Н.Л. Стефанова, В.Д. Будаев, Е.Ю. Яшина. - Москва: Высшая школа, 2004 – 349с. 2. Турецкий, В.Я. Математика и информатика: учебник / В.Я. Турецкий. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2007. - 560 с. 3. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина: сайт. – URL: http://www.mathnet.spb.ru (дата обращения 11.09.2025).
	Тема 1.2. Логические операции. Законы логики.	<i>Вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля:</i> 1. Простые и сложные высказывания. 2. Основные логические операции. 3. Таблицы истинности. 4. Законы логики. 5. Правила преобразования логических выражений <i>Решение задач:</i> 1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны: 1) река Исеть впадает в Каспийское море; 2) пейте апельсиновый сок; 3) все люди – братья; 4) математическая логика – увлекательная наука; 5) $5 < 4$; 6) $x^2 - 5x + 9$; 7) $x^2 - 5x + 9 = 0$; 8) для всех

		натуральных чисел x и y верно равенство $x + y = y + x$. 2. Среди следующих высказываний указать элементарные и составные, в составных высказываниях выделить грамматические связки: 1) число 9 не делится на 3; 2) число 21 делится на 3 и на 7; 3) число 3 является делителем числа 27; 4) если число 15 делится на 5, то оно делится на 3; 5) число 18 делится на 9 тогда и только тогда, когда 9 делится на 3. 3. Составить таблицу истинности для формулы $\bar{x} \vee \bar{y}$. 4. Найти логические значения x и y, при которых выполняются следующие равенства: 1) $x \vee y = \bar{y}$; 2) $1 \rightarrow \bar{x} \rightarrow y = 0$. $\overline{x \vee z \vee x \vee z} \equiv y.$ 5. Найти z, если 6. Выписать все функции алгебры логики одной переменной. <i>Рекомендованные источники литературы</i> 1. Математика и информатика: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Н.Л. Стефанова, В.Д. Будаев, Е.Ю. Яшина. - Москва: Высшая школа, 2004 – 349с. 2. Турецкий, В.Я. Математика и информатика: учебник / В.Я. Турецкий. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2007. - 560 с. 3. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина: сайт. – URL: http://www.mathnet.spb.ru (дата обращения 11.09.2025).	
2.	Раздел 2. Приближенные вычисления		
	Тема 2.1. Величины и их измерения.	<i>Работа с лекционным материалом.</i> <i>Вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля:</i> 1. Понятие положительной скалярной величины. 2. Классификация и основные характеристики измерения величин. 3. Стандартные единицы величин и соотношения между ними. 4. Единицы измерения величин, применяемые в профессиональной деятельности. <i>Решение задач:</i> 1. Сравнить 417 кг и 4 кг 140 г. 2. Выразить в часах 4 ч 56 мин. 3. Выполнить действия над величинами: 19 35 кг +	1

	2 кг 600 г. 4. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца. ВЕЛИЧИНЫ А) масса человека Б) объем ящика с инструментами В) площадь волейбольной площадки Г) ширина футбольного поля ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ 1) 162 кв. м 2) 60 кг 3) 20 л 4) 68 м <i>Рекомендованные источники литературы</i> 1. Самсонова, А.В. Математическая статистика в спортивных исследованиях: учебное пособие / А.В. Самсонова, И.Э. Барникова. - Санкт-Петербург: НГУФК им. П.Ф. Лесгафта, 2022 - 122 с. // Электронная библиотека вузов ФК. - Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору. 2. Семенов, В.Г. Методы математической статистики в исследованиях по физической культуре и спорту: учебное пособие / В.Г. Семенов, В.А. Смольянов. - 2-е изд., перераб. И доп. - Смоленск: СГАФКСТ, 2011 - 89 с. 3. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина: сайт. – URL: http://www.mathnet.spb.ru (дата обращения 11.09.2025).	
Тема 2.2. Приближенные вычисления.	<i>Вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля:</i> 1. Точные и приближенные значения величин. 2. Точность приближенных значений величин. 3. Абсолютная и относительная погрешности. 4. Округление приближенных значений величин. 5. Правила нахождения процентного соотношения. 6. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью. 7. Графическое представление результатов измерения величин <i>Решение задач:</i> 1. Найти абсолютную погрешность приближения числа 3,9 числом 4 1) 0,9; 2) – 0,9; 3) 0,1; 4) – 0,1 2. Какое из чисел является более точным приближением числа 3,464 ? 1) 3; 2) 3,4; 3) 3,6; 4) 4 3. Записать оценку величины n в виде двойного неравенства, если $n = 0,385 \pm 0,001$	2

		1) $0,384 \leq n \leq 0,386$ 2) $0,386 \leq n \leq 0,384$ 3) $n \leq 0,384, n \geq 0,386$ 4) $0,384 < n < 0,386$ 4. Округлить число 734,256 до десятых 1) 734,2 2) 734,3 3) 730 4) 734,26 5. Определите верные и сомнительные цифры чисел $a_0 = 14,28 \pm 0,03$. 6. Определите границу относительной погрешности числа $a = 6,93$, $\Delta a = 0,02$. 7. Найдите границу абсолютной погрешности числа $a = 6,93$, $\Delta a = 0,02$. 8. На спортивные соревнования прибыло 120 участников, среди которых 48 мастеров спорта и 60 кандидатов в мастера спорта. а) Какую часть от общего числа участников составляют кандидаты в мастера спорта? б) Сколько процентов участников являются мастерами спорта? с) Во сколько раз кандидатов в мастера спорта больше, чем мастеров спорта? <i>Рекомендованные источники литературы</i> 1. Самсонова, А.В. Математическая статистика в спортивных исследованиях: учебное пособие / А.В. Самсонова, И.Э. Барникова. - Санкт-Петербург: НГУФК им. П.Ф. Лесгафта, 2022 - 122 с. // Электронная библиотека вузов ФК. - Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору. 2. Семенов, В.Г. Методы математической статистики в исследованиях по физической культуре и спорту: учебное пособие / В.Г. Семенов, В.А. Смольянов. - 2-е изд., перераб. И доп. - Смоленск: СГАФКСТ, 2011 - 89 с. 3. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина: сайт. – URL: http://www.mathnet.spb.ru (дата обращения 11.09.2025).	$n \leq 0,38$
3	Раздел 3. Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики		

	Тема 3.1. Комбинаторика	<i>Работа с лекционным материалом.</i> <i>Вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля:</i> 1. Основные комбинаторные конфигурации 2. Формулы комбинаторики. 3. Правила комбинаторики. 4. Типы комбинаторных задач. <i>Решение задач:</i> 1. Сколько есть способов раздать спортивные номера с 1-го по 5-й пяти хоккеистам? 2. Сколькими способами можно заполнить спортивный пьедестал из трёх мест, если есть 10 претендентов? 3. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки. <i>Рекомендованные источники литературы</i> 1. Турецкий, В.Я. Математика и информатика: учебник / В.Я. Турецкий. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва: ИНФРА-М, 2007. - 560 с. 2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва: Юрайт, 2012. – 479 с. 3. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина: сайт. – URL: http://www.mathnet.spb.ru (дата обращения 11.09.2025).	1
	Тема 3.2. Элементы теории вероятностей.	<i>Вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля:</i> 1. Виды событий. 2. Произведение, сумма и разность событий. 3. Случайное событие и его вероятность. 4. Классическое определение вероятности. 5. Статистическое определение вероятности. 6. Теоремы сложения и умножения вероятностей 7. Формула полной вероятности. Формула Байеса 8. Повторные испытания. Формула Бернулли. <i>Решение задач:</i> 1. Боря выступает на соревнованиях по спортивной гимнастике. Вероятность того, что он потянет ногу, равна 0,1, а вероятность того, что он вывихнет плечо, равна 0,05. Обычно, даже получив повреждения, Боря не подает виду, так что вероятность потянуть ногу и вывихнуть плечо за одни соревнования составляет 0,04. Какова вероятность того, что соревнования пройдут для Бори без таких травм? 2. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго - 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному	2

	выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен. 3. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника - 0,9, для велосипедиста - 0,8 и для бегуна - 0,75. Спортсмен, выбранный наудачу, выполнил норму. Какова вероятность того, что он - велосипедист? 4. Биатлонист стреляет по пяти мишеням - в каждую по одному разу. Вероятность попадания в каждую мишень равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишень, а последние два промахнулся. Результат округлить до сотых. 5. Вероятность того, что футболист забьёт гол с одиннадцатиметрового штрафного удара, равна 0,8. Найдите вероятность того, что в серии из пяти ударов он забьёт ровно три гола. <i>Рекомендованные источники литературы</i> 1. Турецкий, В.Я. Математика и информатика: учебник / В.Я. Турецкий. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва: ИНФРА-М, 2007. - 560 с. 2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В.Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва: Юрайт, 2012. - 479 с. 3. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина: сайт. - URL: http://www.mathnet.spb.ru (дата обращения 11.09.2025).	
Тема 3.3. Элементы математической статистики.	<i>Вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля:</i> 1. Основные понятия математической статистики. 2. Методы описательной статистики. 3. Методы проверки статистических гипотез. <i>Решение задач:</i> 1. Даны результаты измерения силы кисти десяти студентов специализации «Борьба»: 44, 45, 50, 53, 60, 50, 48, 52, 50, 62 . Вычислить моду, медиану, среднее арифметическое значение, размах вариации, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации и ошибку выборочного среднего данной выборки. Дать анализ полученных результатов. 2. Определите достоверность различий между результатами прыжка в высоту с места у волейболистов 1 спортивного разряда (X см.) и у волейболистов 2 спортивного разряда (Y см.) X (см.) 60,62,64,65,65,66,68.	2

		У (см.) 59,61,64, 64, 65, 67,67. <i>Рекомендованные источники литературы</i> 1. Алексеева, И.В. Математическая статистика в физической культуре и спорте: учебное пособие / И.В. Алексеева. - Великие Луки, 2020 - 105 с. - 1 CD-ROM. - Загл. с титул.экрана. 2. Самсонова, А.В. Математическая статистика в спортивных исследованиях: учебное пособие / А.В. Самсонова, И.Э. Барникова. - Санкт-Петербург: НГУФК им. П.Ф. Лесгафта, 2022 - 122 с. // Электронная библиотека вузов ФК. - Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору. 3. Семенов, В.Г. Методы математической статистики в исследованиях по физической культуре и спорту: учебное пособие / В.Г. Семенов, В.А. Смольянов. - 2-е изд., перераб. И доп. - Смоленск: СГАФКСТ, 2011 - 89 с.	
--	--	---	--

5.2. Методические рекомендации к различным видам самостоятельной работы

Методические рекомендации для самостоятельного изучения вопросов по теме

В связи с тем, что значительное время при освоении учебной дисциплины отводится на самостоятельную работу, обучающемуся в процессе подготовки к практическим занятиям, а также при самостоятельном изучении первоисточников и специальной аналитической литературы предлагается подумать над контрольными вопросами. Эти вопросы помогают изучить рассматриваемые, а также не рассматриваемые темы на лекции, предлагают подумать и определить собственное отношение к тем или иным аспектам и предложить решение проблемы. Для эффективного закрепления материала обучающемуся предлагается пройти мини самотестирование.

Методические рекомендации для подготовки участия обучающегося в дискуссии по вопросам на практическом занятии

Поскольку часть изучаемых тем носит дискуссионный проблемный характер, обучающимся предлагается принять участие в обсуждении ряда вопросов и высказать свое мнение по обсуждаемым темам. Обучающийся должен быть готов сделать развернутое выступление на практическом занятии по заданным вопросам и ответить на дополнительные вопросы.

Методические рекомендации для самостоятельной работы по решению задач

Осуществляется путем решения задач, предлагаемых преподавателем, и разбора аналогичных примеров, решенных на практических занятиях или рассматриваемых в рекомендованной литературе. Важнейшая часть – анализ полученных результатов.

Методические рекомендации для подготовки к контрольной работе

Примерные варианты контрольных работ представлены в приложении 1. Ознакомление с темами контрольных работ, их количеством, условиями ответов на вопросы контрольных работ, самими вопросами и вариантами ответов на них позволяет

создать относительно полное впечатление об особенностях их проведения. При подготовке к контрольной работе по определённой теме рекомендуется повторно проанализировать лекционный материал по теме, повторить особенности методики изучения вопроса, освоенной на практическом занятии, и ознакомиться с содержанием рекомендованных разделов учебных пособий.

Методические рекомендации для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Итоговым контролем по данной дисциплине является: 3 семестр – зачет. Зачетные билеты формируются на базе приведенного ниже перечня вопросов для зачета, а также включают практические задания. Форма проведения зачета - письменный ответ на задания билета.

5.3. Критерии оценки самостоятельной работы обучающегося

Критерии оценки самостоятельного изучения материала

Результаты самостоятельного изучения материала обсуждаются на практических занятиях, оценивание производится по следующим критериям:

оценка «отлично»	По самостоятельно изученным темам/вопросам отвечает полно и правильно; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания обучающимся данного материала
оценка «хорошо»	Дает правильные ответы, допускает неточности или недочеты, может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания обучающимся данного материала
оценка «удовлетворительно»	Отвечает, но допускает ошибки, излагает материал недостаточно логично и последовательно; затрудняется при ответах на вопросы преподавателя; с трудом приводит отдельные примеры из практики
оценка «неудовлетворительно»	Не отвечает или отвечает неправильно, только иногда дает правильные ответы; не приводит примеров из практики

Критерии оценки участия обучающегося в дискуссии по вопросам на лекции и на семинаре

Результаты участия обучающегося в дискуссии на практических занятиях оцениваются по следующим критериям:

оценка «отлично»	Обучающийся четко и ясно формулирует точку зрения в процессе дискуссии, выдвигает обоснованные аргументы в поддержку своей точки зрения, хорошо владеет научной терминологией, имеет знания о сути обсуждаемой проблемы, речь последовательна, непротиворечива, убедительна
оценка «хорошо»	Обучающийся нечетко формулирует точку зрения в процессе дискуссии, выдвигает не всегда обоснованные аргументы в поддержку своей точки зрения, по большей части владеет научной терминологией, понимает суть обсуждаемой проблемы, но затрудняется в детализации; речь не всегда последовательна и убедительна

оценка «удовлетворительно»	Активность обучающегося недостаточна, а степень подготовленности к дискуссии на недостаточно убедительном уровне, но свидетельствует о понимании сути обсуждаемого явления; речь ограничена
оценка «неудовлетворительно»	Обучающийся имеет слабое представление о содержании обсуждаемой темы дискуссии, аргументы носят бездоказательный характер, плохо владеет правилами научной аргументации, допускает серьезные ошибки в использовании информации, аргументы носят несоответствующий обсуждаемой теме характер, нечетко и неясно формулирует точку зрения; речь скупа, неубедительна

Критерии оценки самостоятельного решения задач с представлением преподавателю записей для ознакомления

оценка «отлично»	Письменное задание выполнено правильно, поставленная задача имеет решение без ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала). Грамотно и логично интерпретированы результаты вычислений.
оценка «хорошо»	Письменное задание выполнено, имеет место правильное решение задачи без ошибок (возможна одна ошибка), представлен анализ результатов вычислений, но с отдельными замечаниями
оценка «удовлетворительно»	Письменное задание выполнено, имеет место решение поставленной задачи, интерпретация результатов вычисления, но с ошибками
оценка «неудовлетворительно»	Письменное задание не выполнено или выполнено неправильно, поставленная задача имеет неправильное решение или не решена. Неправильно дана интерпретация результатов вычисления.

Критерии оценки подготовки к контрольной работе по теме

При оценке результатов достижения компетенций посредством контрольной работы в виде тестовых заданий, позволяющих измерить уровень знаний и умений обучающихся, применяется коэффициент освоения.

Коэффициент освоения (К) определяется по формуле:

$K = A : P$, где: К – коэффициент освоения, А – число правильных ответов,

Р – общее число вопросов в тестовом задании. Критерии оценки:

Оценка	Коэффициент освоения (К)	Коэффициент освоения (К), %
оценка «отлично»	0,9 – 1	90 - 100
оценка «хорошо»	0,75 – 0,89	75 - 89
оценка «удовлетворительно»	0,60 – 0,74	60 - 74
оценка «неудовлетворительно»	< 0,6	менее 60

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

6.1. Показатели и критерии оценивания компетенций на этапе изучения дисциплины

Таблица раздела 1 «РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ» демонстрирует взаимосвязь педагогического контроля с соотнесенными с основной профессиональной образовательной программой профессиональными стандартами - в ней определены трудовые функции профессиональных стандартов, выполнение которых обеспечивает формирование соответствующих компетенций в рамках учебной дисциплины.

6.2. Индикаторы достижения компетенций по уровню их сформированности

Индикаторы достижения	Критерий оценивания	Шкала оценивания	Уровень сформированной компетенции
Знает (соответствует таблице раздела 1)	Знает	отлично	высокий
		хорошо	Повышенный
		удовлетворительно	Пороговый
	Не знает	неудовлетворительно	Недостаточный
Умеет (соответствует таблице раздела 1)	Умеет	отлично	Высокий
		хорошо	Повышенный
		удовлетворительно	Пороговый
	Не умеет	неудовлетворительно	Недостаточный
Имеет опыт/владеет (соответствует таблице раздела 1)	Имеет опыт/владеет	отлично	Высокий
		хорошо	Повышенный
		удовлетворительно	Пороговый
	Не владеет	неудовлетворительно	Недостаточный

6.3. Соотношение индикаторов достижения со шкалой критериев их оценивания и уровнем их сформированности

Индикаторы достижения	Критерий оценивания	Уровень сформированной компетенции
Знает (соответствует таблице раздела 1)	Показывает полные и глубокие знания, логично и аргументировано отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные, показывает высокий уровень теоретических знаний	высокий
	Показывает глубокие знания, грамотно	Повышенный

Индикаторы достижения	Критерий оценивания	Уровень сформированной компетенции
	излагает ответ, достаточно полно отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные, в то же время при ответе допускает несущественные ошибки	
	Показывает достаточные, но не глубокие знания, при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуются уточняющие вопросы	Пороговый
	Показывает недостаточные знания, не способен аргументированно и последовательно излагать материал, допускает грубые ошибки, неправильно отвечает на дополнительные вопросы или затрудняется с ответом	Недостаточный
Умеет (соответствует таблице раздела 1)	Умеет применять полученные знания для решения конкретных практических задач, способен предложить альтернативные решения анализируемых проблем, формулировать выводы	Высокий
	Умеет применять полученные знания для решения конкретных практических задач, способен формулировать выводы, но не может предложить альтернативные решения анализируемых проблем	Повышенный
	При решении конкретных практических задач возникают затруднения	Пороговый
	Не может решить практические задачи	Недостаточный
Имеет опыт/владеет (соответствует таблице раздела 1)	Владеет навыками, необходимыми для профессиональной деятельности, способен оценить результат своей деятельности	Высокий
	Владеет навыками, необходимыми для профессиональной деятельности, затрудняется оценить результат своей деятельности	Повышенный
	Демонстрирует слабые навыки, необходимые для профессиональной деятельности	Пороговый
	Отсутствие навыков или неспособность их продемонстрировать	недостаточный

6.4. Методические материалы для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих формирование компетенций в процессе освоения образовательной программы

6.4.1. Перечень вопросов для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания

1. Множества. Основные понятия.
2. Отношения между множествами.
3. Операции над множествами.
4. Простые и сложные высказывания.
5. Основные логические операции.
6. Таблицы истинности.
7. Законы логики.
8. Правила преобразования логических выражений.
9. Понятие положительной скалярной величины.
10. Классификация и основные характеристики измерения величин.
11. Стандартные единицы величин и соотношения между ними.
12. Единицы измерения величин, применяемые в профессиональной деятельности.
13. Точные и приближенные значения величин.
14. Точность приближенных значений величин.
15. Абсолютная и относительная погрешности.
16. Округление приближенных значений величин.
17. Правила нахождения процентного соотношения.
18. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью.
19. Графическое представление результатов измерения величин.
20. Основные элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.
21. Виды событий. Произведение, сумма и разность событий.
22. Классическое и статистическое определения вероятности.
23. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
24. Вероятность появления хотя бы одного события.
25. Формула полной вероятности.
26. Формула Байеса.
27. Повторные испытания. Формула Бернулли.
28. Предмет математической статистики и ее роль в задачах физической культуры и спорта.
29. Виды шкал. Типы данных. Правила ранжирования.
30. Генеральная совокупность и выборка. Требования к выборке. Классификация выборки.
31. Способы первичного описания данных (вариационный ряд распределения и интервальный вариационный ряд). Графическое представление данных.
32. Меры центральной тенденции.
33. Меры изменчивости. Оценка разброса.
34. Нормальное распределение, его особенности.
35. Статистическая значимость и статистические гипотезы. Принятие и отвержение гипотез.
36. Методы проверки статистических гипотез.

6.4.2. Перечень вопросов для промежуточной аттестации (зачет), оценивающих знания и умения

1. Пустое множество содержит:
 - а) 1 элемент; б) бесконечно много элементов; в) ни одного элемента
2. Множества обозначаются ...
 - а) большими латинскими буквами; б) малыми латинскими буквами
3. Даны два множества: $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ и $B = \{9, 11, 13, 15\}$. Найдите множество $A \cap B$.

- а) {9,10,11,12,13,14,15}; б) {11,13,15}; в) {9,10,12,14}; г) {11, 12, 13,14}
4. Даны два множества: $A=\{10,11,12,13,14,15\}$ и $B=\{9,11,13,15\}$. Найдите множество $A \cup B$.
- а) {9,10,11,12,13,14,15}; б) {11,13,15}; в) {9,10,12,14}; г) {11, 12, 13,14}
5. Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос, любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 21 студент занимается спортом и слушают музыку. Сколько человек не увлекаются ни спортом, ни музыкой?
- а) 10 б) 15 в) 18 г) 13
6. Среди 35 туристов одним английским языком владеют 11 человек, английским и французским – 5 человек. 9 человек не владеют ни английским, ни французским. Сколько человек владеют только французским языком?
- а) 15 б) 17 в) 8 г) 7
7. Наука, изучающая законы и формы мышления, называется:
- а) алгебра; б) геометрия; в) философия; г) логика.
8. Что такое логика?
- а) это наука о суждениях и рассуждениях;
- б) это наука, изучающая законы и методы накопления, обработки и сохранения информации с помощью ЭВМ;
- в) это наука о формах и законах человеческого мышления и, в частности, о законах доказательных рассуждений;
- г) это наука, занимающаяся изучением логических основ работы компьютера.
9. Какое из следующих высказываний является истинным?
- а) город Париж – столица Англии; б) $3 + 5 = 2 + 4$;
- в) $II + VI = VIII$; г) томатный сок вреден.
10. Логическая функция – это:
- а) простое высказывание; б) составное высказывание;
- в) вопросительное предложение; г) логическая операция.
11. Повествовательное предложение, в котором что-то утверждается или отрицается называется:
- а) выражение; б) вопрос; в) высказывание; г) умозаключение.
12. Как кодируется логическая переменная, принимающая значение "ЛОЖЬ"?
- а) 0; б) 1; в) 2; г) неправда
13. Константа, которая обозначается "1" в алгебре логики называется:
- а) ложь; б) истина; в) правда; г) неправда.
14. Какое из следующих высказываний является истинным?
- а) $8 + 2 = 3 + 5$; б) $III + V = VIII$;
- в) Число десять - нечетное ; г) город Париж – столица Англии.
15. Объединение двух высказываний в одно с помощью союза «и» называется:
- а) инверсия; б) конъюнкция; в) дизъюнкция; г) импликация.
16. Логической операцией не является:
- а) логическое деление; б) логическое сложение;
- в) логическое умножение; г) логическое отрицание.
17. Какая из логических операций не является базовой?
- а) конъюнкция; б) дизъюнкция; в) инверсия; г) эквивалентность.
18. Объединение двух высказываний в одно с помощью оборота "если..., то..." называется:
- а) инверсия; б) конъюнкция; в) дизъюнкция; г) импликация.
19. Двойное отрицание логической переменной равно:
- а) 0; б) 1; в) исходной переменной; г) обратной переменной.
20. Таблица, содержащая все возможные значения логического выражения, называется:
- а) таблица ложности; б) таблица истинности;
- в) таблица значений; г) таблица ответов.

35. Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{2}{3}$ числом 0,7.

- а) 0,1 б) 0,05 в) 0,01 г) 0,07

36. Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{1}{7}$ числом 0,14

- а) 0,02 б) 0,07 в) 0,01 г) 0,05

37. Округлите число 3,12 до единиц и найдите (в процентах) относительную погрешность такого приближения, выразите ее в процентах.

- а) 3,12% б) 30% в) 3,85% г) 0,12%

38. Округлите число 2,346 до 0,01 и найдите (в процентах) относительную погрешность такого приближения, выразите ее в процентах.

- а) 2,3% б) 0,17% в) 0,004% г) 23%

39. Хоккейные коньки стоили 4500 руб. Сначала цену снизили на 20%, а потом эту сниженную цену повысили на 20%. Сколько стали стоить коньки после повышения цены?

- а) 3500 б) 4300 в) 4320 г) 3600

40. Среди 40 000 жителей города 60% не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 80% смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч по телевизору?

- а) 12800 б) 11200 в) 15000 г) 13100

41. Сколькими способами можно рассадить 4 человек за столом?

- а) 60 б) 75 в) 24 г) 48

42. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

- а) 60 б) 120 в) 100 г) 85

43. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать капитана и его ассистента;

- а) 110 б) 121 в) 120 г) 140

44. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать из них двух игроков для прохождения допинг-контроля?

- а) 22 б) 110 в) 60 г) 55

45. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найти вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

- а) 0,52 б) 0,48 в) 0,42 г) 0,78

46. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что студентом будет сдан хотя бы один экзамен.

- а) 0,22 б) 0,018 в) 0,998 г) 0,648

47. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

- а) 0,15 б) 0,85 в) 0,7 г) 0,56

48. Три студентки живут в одной комнате и по очереди моют посуду. Вероятность разбить тарелку для первой студентки равна 0,03, для второй 0,01, для третьей — 0,04. На кухне раздался звон разбитой тарелки. Найти вероятность того, что третья студентка мыла тарелку.

- а) 0,5 б) 0,8 в) 0,34 г) 0,62

49. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза.

- а) 0,125 б) 0,615 в) 0,375 г) 0,252

50. Вероятность того, что футболист забьёт гол с одиннадцатиметрового штрафного удара, равна 0,6. Найдите вероятность того, что в серии из пяти ударов он забьёт ровно три гола.

- а) 0,5251 б) 0,3456 в) 0,4752 г) 0,676

51. Предметом математической статистики является изучение ...

- а) случайных величин по результатам наблюдений; б) случайных явлений;
в) совокупностей; г) числовых характеристик.

52. Совокупность всех возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определенной случайной величины называется ...

- а) выборкой; б) вариантами;
в) генеральной совокупностью; г) выборочной совокупностью

53. Какое из следующих измерений относится к классу порядка измерительных шкал:

- а) числа, кодирующие темперамент;
б) академический ранг как мера продвижения по службе;
в) метрическая система измерения расстояния;
г) телефонные номера.

54. Какую шкалу используют при измерении времени:

- а) интервальную; б) отношений; в) Чеддока; г) номинативную

55. К качественным видам относятся следующий признак:

- а) рост человека; б) цвет волос; в) вес человека г) телефонные номера

56. К количественным видам относятся следующий признак:

- а) рост человека; б) цвет волос; в) цвет глаз; г) марка машины

57. Среднее арифметическое значение совокупности это:

- а) значение признака в середине вариационного ряда;
б) полуразность максимального и минимального значений вариационного ряда;
в) полусумма максимального и минимального значений вариационного ряда;
г) отношение суммы всех величин совокупности к их общему числу.

58. Среднее арифметическое данных: 10, 9, 9, 8, 10, 9, 8, 10, 9, 6 равно:

- а) 10 б) 8,2 в) 8,8 г) 9

59. Мода — это:

- а) максимальное значение признака совокупности;
б) наиболее часто встречающееся значение признака;
в) среднее арифметическое значение совокупности;
г) минимальное значение признака совокупности.

60. Мода вариационного ряда 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 7, 7, 8, 9 равна ...

- а) 7; б) 8; в) 2; г) 4.

61. Медианой вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на ранжированного ряда наблюдений.

- а) минимум; б) максимум; в) начало; г) середину

62. Медиана вариационного ряда 2, 1, 2, 4, 3, 4, 7, 4, 7, 8, 9 равна ...

- а) 4; б) 7 в) 8 г) 9

63. Размах— это:

- а) разница между максимальным и минимальным значениями;
б) максимальное значение признака совокупности;
в) среднее арифметическое значение совокупности;
г) минимальное значение признака совокупности.

64. Размах вариационного ряда 104, 87, 101, 130, 148, 92, 97, 105, 134, 121 равен:

- а) 61; б) 60; в) 75; г) 30

65. Уровень статистической значимости $p=0,001$ является:

- а) низким б) средним в) высоким г) нет такого уровня статистической значимости

66. При каком минимальном уровне значимости принято отвергать нулевую гипотезу?

- а) 5% уровень б) 7 % уровень в) 9 % уровень г) 10% уровень

6.4.3. Перечень практических заданий на зачете, необходимых для оценки умений и опыта деятельности

Практическое задание №1

Изобразите элементы множеств на числовой прямой.

- а) $A = \{x, x \in \mathbb{N}, x < 4\}$.

- б) A - множество действительных решений неравенства: $2x^2 - x + 7 \leq 0$.

Практическое задание №2

Выясните, в каких отношениях находятся множества A и B . Проиллюстрируйте эти отношения, используя круги Эйлера.

- а) $A = \{a, a \in \mathbb{N}, a < 6\}$, $B = \{b, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq b \leq 5\}$.

- б) $A = \{a, в, г\}$, B – множество букв слова «сапог».

Практическое задание №3

На школьной спартакиаде каждый из 25 учеников 9 –го класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в высоту. Оба норматива выполнили 7 человек, а 11 учеников выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив по прыжкам в высоту. Сколько учеников выполнили норматив: а) по бегу; б) по прыжкам в высоту; в) по прыжкам при условии, что не выполнен норматив по бегу?

Практическое задание №4

Составьте несколько сложных высказываний, используя простые высказывания. Запишите высказывания в виде логического выражения.

А. На часах 7 часов вечера.

Б. Василий делает уроки.

В. Василий смотрит футбол по TV.

Практическое задание №5

Составьте и запишите истинные сложные высказывания из простых с использованием логических операций.

- а) Неверно, что $10 > Y > 5$ и $Z < 0$.

- б) Z является $\min(Z, Y)$.

- в) Любое из чисел X, Y, Z положительно.

Практическое задание №6

Постройте таблицу истинности для выражения: $F = (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B)$.

Практическое задание №7

Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что:

- Даша живет не в Париже,
- Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

Определите в каком городе живет каждая дочь и назовите ее профессию.

Практическое задание №8

Упростить логическое выражение $F = (\neg A \vee B) \& \neg (A \& B)$.

Практическое задание №9

Сравните величины:

- а) 56 мин и $\frac{7}{10}$ ч; б) $\frac{3}{50}$ м и $\frac{4}{5}$ дм;
 в) 1,5 см и $\frac{3}{20}$ дм; г) $\frac{5}{4}$ кг и 1250 г.

Практическое задание №10

Длина круговой дорожки для бега 400 м. За 6 мин 40 с Андрей пробежал 4 круга, а Николай – 5 кругов. На сколько метров в секунду скорость Николая больше скорости Андрея?

Практическое задание №11

Вычислите:

- 15 ч 36 мин. – 6 ч. 54 мин. =
 10 мин. 28 сек. + 16 мин. 56 сек. =
 22 ч. 15 мин. – 17 ч. 46 мин. =
 12 мин. 37 сек. + 8 мин. 52 сек. =

Практическое задание №12

Лыжник шёл 3 ч со скоростью 18 км/ч и 2 ч со скоростью 15 км/ч. Какое расстояние прошёл лыжник за всё это время?

Практическое задание №13

Найдите абсолютную погрешность приближения числа 7,4 числом 7.

Практическое задание №14

Имеем результаты измерений: $(3 \pm 0,05)A$; $(5 \pm 0,3)A$; $(127 \pm 0,8)B$; $(129 \pm 2)B$. Сравните эти измерения по точности.

Практическое задание №15

Измерение частоты сердечных сокращений после бега с помощью высокоточного прибора даёт величину, близкую к истинной и равную 150 уд/мин. Одновременное пальпаторное измерение даёт величину, равную 162 уд/мин. Определите абсолютную и относительную погрешности измерения.

Практическое задание №16

- Найдите: а) приближенное значение разности $x - y$, если $x \approx 15,67$, $y \approx 3,1$.
 б) приближенное значение суммы $x + y$, если $x \approx 18,237$, $y \approx 1,42$.

в) относительную погрешность приближения числа $\frac{2}{3}$ числом 0,7.

Практическое задание №17

Хоккейные коньки стоили 4500 руб. Сначала цену снизили на 20%, а потом эту сниженную цену повысили на 20%. Сколько стали стоить коньки после повышения цены?

Практическое задание №18

Номинальная масса детали, установленная производством, равна 6 кг. Допустимая погрешность согласно стандарту качества производства составляет $\pm 4\%$. Определите рамки допустимой погрешности. Лежит ли в рамках допустимой погрешности значение 6,15 кг?

Практическое задание №19

У двенадцати баскетболистов измерили силу левой кисти. Результат измерений: 65, 55, 50, 50, 65, 70, 65, 80, 70, 65, 70. Изобразите графическое представление результатов измерений.

Практическое задание №20

В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать из них двух игроков для прохождения допинг-контроля?

Практическое задание №21

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Практическое задание №22

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Практическое задание №23

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Практическое задание №24

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй — 0,9; третий — 0,8. Найдите вероятность того, что студентом будет сдан хотя бы один экзамен.

Практическое задание №25

В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Практическое задание №26

Три студентки живут в одной комнате и по очереди моют посуду. Вероятность разбить тарелку для первой студентки равна 0,03, для второй 0,01, для третьей – 0,04. На кухне раздался звон разбитой тарелки. Найти вероятность того, что третья студентка мыла тарелку.

Практическое задание №27

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза.

Практическое задание №28

Дана выборка, состоящая из чисел 1,3,1,2,3,5,1,3,1,2. Составить вариационный ряд и построить полигон относительных частот.

Практическое задание №29

Исследователем были получены следующие показатели признаков: Нумерация спортсменов в команде, результаты жеребьевки, место, занятое на соревнованиях, результаты ранжирования спортсменов, оценка мастерства в баллах, календарные даты, суставной угол, температура, длина, сила, масса, скорость и т. п.. К каким типам шкал относятся данные показатели признаков?

Практическое задание №30

Результаты исследования здоровья студентов 2 групп по характеристике частоты сердечных сокращений (ЧСС) показали одинаковую среднюю величину (80 уд/мин). Критерий разнообразия ЧСС в одной группе — 2 удара в минуту, в другой — 3 удара в минуту. Определите, для какой группы средняя величина пульса при одинаковой средней частоте сердечных сокращений и одинаковом числе студентов типичнее, т.е. лучше отражает состояние здоровья студентов.

Практическое задание №31

Даны результаты измерения у баскетболистов силы левой кисти (кг): 75; 63; 60; 70; 75; 80; 66; 60; 65; 75; 74; 77; 64; 74; 90. По данным результатам построить интервальный вариационный ряд (число интервалов $k=6$), гистограмму, полигон частот и полигон накопленных частот.

Практическое задание №32

В качестве оценки силовой подготовки одиннадцати учащихся 5 класса произведен тест на количество подтягиваний на перекладине. Данные теста следующие: 10, 9, 9, 8, 10, 9, 8, 10, 9, 6, 5. Построить дискретный вариационный ряд. Вычислить моду, медиану, среднее арифметическое значение. Какие выводы о форме распределения можно сделать из сопоставления среднего и медианы?

Практическое задание №33

В качестве оценки силовой подготовки одиннадцати учащихся 5 класса произведен тест на количество подтягиваний на перекладине. Данные теста следующие: 10, 9, 9, 8, 10, 9, 8, 10, 9, 6, 5. Найти размах вариации, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации и ошибку выборочного среднего данной выборки. Дать анализ полученных результатов.

Практическое задание №34

При изучении физического развития школьников 8-го класса было установлено значительное разнообразие по росту (от 156 до 175 см). Средняя величина роста этих

мальчиков равна 165 см, сигма= ± 4 см. Находятся ли крайние значения роста школьников в пределах нормального распределения признака?

Практическое задание №35

У двух групп спортсменов ($n_x = 16, n_y = 13$), тренирующихся по различным методикам, были получены следующие статистические характеристики: $\bar{X} = 13$ с; $\bar{Y} = 14$ с; $\sigma_x^2 = 0,41$, $\sigma_y^2 = 0,39$. Обе выборки извлечены из нормальных совокупностей. С помощью критерия Стьюдента выявить, существуют ли статистически достоверные различия в результатах этих групп?

Практическое задание №36

Группа школьников ($n = 16$) в течение летних каникул находилась в спортивном лагере. До и после сезона у них измерили жизненную емкость легких (ЖЕЛ). Были получены следующие статистические характеристики: $\bar{X}_d = 150$, $\sigma_d = 142$. С помощью критерия Стьюдента определите, значимо ли изменился этот показатель под влиянием интенсивных упражнений.

6.5. Паспорт оценочных средств промежуточной аттестации

№ п\п	Тема или раздел	Код контролируемых компетенций	Номер зачетного вопроса для контроля знаний	Номер зачетного вопроса для контроля знаний и умений	Номер практического задания для контроля сформированности умений и опыта практической деятельности
1.	Тема 1.1. Основные элементы теории множеств. Операции над множествами.	ОК 01, ОК 02 ПК 1.1, ПК 2.4	1-3	1-6	1-3
2.	Тема 1.2. Логические операции. Законы логики.	ОК 01, ОК 02 ПК 1.1, ПК 2.4	4-8	7-20	4-8
3.	Тема 2.1. Величины и их измерения.	ОК 01, ОК 02 ПК 1.1, ПК 2.4	9-12	21-24	9-12
4.	Тема 2.2. Приближенные вычисления.	ОК 01, ОК 02 ПК 1.1, ПК 2.4	13-19	25-40	13-19
5.	Тема 3.1. Комбинаторика.	ОК 01, ОК 02 ПК 1.1, ПК 2.4	20	41-44	20
6.	Тема 3.2. Элементы теории вероятностей.	ОК 01, ОК 02 ПК 1.1, ПК 2.4	21-27	45-50	21-27
7.	Тема 3.3. Элементы математической статистики.	ОК 01, ОК 02 ПК 1.1, ПК 2.4	28-36	51-66	28-36

6.6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности при проведении промежуточной аттестации

Процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций, подробно описаны в Положении о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ФГБОУ ВО «Великолукская государственная академия физической культуры и спорта» (принято решением учёного совета ФГБОУ ВО «ВЛГАФК» 24 апреля 2025 года, протокол № 09, введено в действие приказом ректора ФГБОУ ВО «ВЛГАФК» № 78 от 24 апреля 2025 года).

Критерии оценивания ответа обучающегося на зачёте

«зачтено»	Обучающийся обнаруживает знание большей части основного учебного материала в объёме, необходимом для дальнейшего обучения и предстоящей работы по профессии, возможны некоторые неточности при ответе и/или интерпретации примеров из образовательной практики, которые обучающийся исправляет после пояснений, данных преподавателем; владеет навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач. Уровень сформированности компетенций - не ниже порогового
«не зачтено»	Обучающийся имеет существенные пробелы в теоретических знаниях содержания дисциплины, допускает принципиальные ошибки при выполнении заданий, не способен решать профессиональные задачи. Уровень сформированности компетенций - недостаточный

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

7.1.1. Рекомендуемая литература (основная)

1. Алексеева, И.В. Математическая статистика в физической культуре и спорте / И.В. Алексеева .— Великие Луки : ВЛГАФК, 2020 .— 106 с. — URL: <https://lib.rucont.ru/efd/775919> (дата обращения: 20.05.2026)..

2. Математика и информатика: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Н.Л. Стефанова, В.Д. Будаев, Е.Ю. Яшина. - Москва: Высшая школа, 2004 – 349с.

5. Рубанович, В.Б. Врачебно-педагогический контроль при занятиях физической культурой: учебное пособие / В.Б. Рубанович. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва: Юрайт, 2017. - 264 с.

6. Турецкий, В.Я. Математика и информатика: учебник / В.Я. Турецкий. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва: ИНФРА-М, 2007. - 560 с.

7.1.2. Рекомендуемая литература (дополнительная)

7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В.Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва: Юрайт, 2012. - 479 с.

8. Губа, В.П. Методы математической обработки результатов спортивно-педагогических исследований: учебно-методическое пособие / В.П. Губа, В.В. Пресняков. - Москва: Человек, 2015 - 288 с.

9. Самсонова, А.В. Математическая статистика в спортивных исследованиях: учебное пособие / А.В. Самсонова, И.Э. Барникова. - Санкт-Петербург: НГУФК им. П.Ф. Лесгафта, 2022 - 122 с. // Электронная библиотека вузов ФК. - Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору.

10. Семенов, В.Г. Методы математической статистики в исследованиях по физической культуре и спорту: учебное пособие / В.Г. Семенов, В.А. Смольянов. - 2-е изд., перераб. и доп. - Смоленск: СГАФКСТ, 2011 - 89 с.

11. Шульгин, Г.Е. Математические методы анализа измерений в спорте: учебное пособие / Г.Е. Шульгин, С.Н. Зубарев. - Малаховка: МГАФК, 2022 - 136с. // Электронная библиотека вузов ФК. - Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору.

7.2. Перечень ресурсов информационно-коммуникационной сети «Интернет»

1. Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина: сайт. - URL: <http://www.mathnet.spb.ru> (дата обращения 31.08.2025).

2. Самаров К.Л. Математическая статистика: учебник для студентов по математике // Резольвента: сайт. - 2009 - . - URL: <https://www.resolventa.ru/index.php/matematiceskaya-statistika> (дата обращения: 31.08.2025).

7.3. Программное обеспечение

1. 1С Предприятие 8
2. Microsoft Office 2007
3. Microsoft Windows XP
4. Microsoft Windows 7
5. «Личный кабинет обучающегося» на веб-ресурсе собственной разработки

7.4. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

7.4.1. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы, доступные в локальной сети

1. Электронная библиотека Национального государственного университета им. Лесгафта (Санкт-Петербург). - Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору.

2. Электронная библиотека Московской государственной академии физической культуры (Малаховка). – Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору.

3. Электронная библиотека Сибирского университета физической культуры (Омск). – Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору.

4. Электронная библиотека Воронежской государственной академии спорта. – Режим доступа: локальная сеть ВЛГАФК, по договору.

7.4.2. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы, доступные в сети «Интернет» (заключены договора с ФГБОУ ВО «ВЛГАФК»)

1. РУКОНТ: национальный цифровой ресурс: межотраслевая электронная библиотека: сайт / Консорциум «КОНТЕКСТУМ». – Москва, 2010. – URL: <http://lib.rucont.ru/search> (дата обращения: 10.04.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей.

7.4.3. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы сети «Интернет» свободного доступа

1. Электронная библиотека: библиотека диссертаций: сайт / Российская государственная библиотека. – Москва: РГБ, 2003. – URL: <https://search.rsl.ru/#digitalAvail=digitized&digitalAvail=accessFree&col=autoref&col=disser> (дата обращения: 10.04.2025).

2. eLIBRARY.RU: научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000. – URL: <http://www.elibrary.ru> (дата обращения: 10.04.2025).

3. Научная педагогическая электронная библиотека: сайт / Научная педагогическая библиотека им К.Д. Ушинского. – Москва, 2021. – URL: <http://elib.gnpbu.ru> (дата обращения: 10.04.2025).

4. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»: сайт. – Москва. – URL: <http://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 10.04.2025).

5. Физкультура и спорт: сайт. – URL: <https://fis1922.ru/> (дата обращения: 01.09.2025).

6. Электронная библиотека ГПИБ: сайт / Государственная публичная историческая библиотека России (ГПИБ). – Москва, 1863-. – URL: <http://elib.shpl.ru/ru/nodes/9347-elektronnaya-biblioteka-gpib/> (дата обращения: 08.09.2021). – Текст: электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
Лекционная аудитория с мебелью № 217 учебного корпуса № 1, пл. Юбилейная д.4	132 посадочных мест, доска информационная пластиковая, экран 3000×2600, проектор мультимедийный BenQ sp 831 с дистанционным пультом, ноутбук h.p. Probook 4515S, мышь компьютерная; Мультимедийное сопровождение преподаваемой дисциплины. Вешалки – 3шт., трибуна.
Аудитория № 201 учебного корпуса № 1, пл. Юбилейная д.4	24 посадочных мест, доска информационная пластиковая, стол письменный, стул, столы ученические – 12 штук, стулья ученические – 24 штук, вешалка 1 шт., проектор мультимедийный BenQ, ноутбук Samsung R 560, мультимедийное сопровождение преподаваемой дисциплины, мышь компьютерная, электронные калькуляторы Citizen –

	5 шт, таблицы критических значений критериев – 20 шт.
Аудитория № 131* учебного корпуса № 1, пл. Юбилейная д.4	10 посадочных мест, стульев – 13 штук, столов ученических – 10 штук, стол преподавателя, доска. Персональные компьютеры Формоза – 11 штук, мониторы Samsung 710 N – 11 штук; принтер P2015d-8067-00, кондиционер, вешалка – 1 шт.
Электронный читальный зал* библиотеки здания общежития с пристроенным учебным корпусом, пл. Юбилейная д. 4, к. 1	11 посадочных мест, ученические столы – 11, ученические стулья – 11, персональные компьютеры ТОНК 1507 – 11 штук, мониторы Samsung 710N – 11 штук

**Помещения для самостоятельной работы*

9. ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН лекций и практических занятий по дисциплине

№ п/п	Темы лекций, лабораторных, практических и семинарских занятий в хронологическом порядке	Перечень необходимого оборудования, наглядные пособия	Количество часов и вид занятия	Возможность применения электронного обучения и дистанционных образовательных технологий при проведении учебного занятия (да/нет)
1.	Тема 1.1. Множества. Основные понятия. Отношения между множествами. Операции над множествами.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция № 1, 1ч	да
2.	Тема 1.2. Простые и сложные высказывания. Основные логические операции. Таблицы истинности. Законы логики. Правила преобразования логических выражений.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция № 2, 1ч	да
3.	Тема 2.1. Понятие положительной скалярной величины. Классификация и основные характеристики измерения величин. Стандартные единицы величин и соотношения между ними. Единицы измерения величин, применяемые в профессиональной деятельности.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция №3, 1ч	да

4.	Тема 2.2. Точные и приближенные значения величин. Точность приближенных значений величин. Абсолютная и относительная погрешности. Округление приближенных значений величин. Правила нахождения процентного соотношения. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью. Графическое представление результатов измерения величин.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция № 4, 1ч	да
5.	Тема 3.1. Основные комбинаторные конфигурации. Формулы комбинаторики. Правила комбинаторики. Типы комбинаторных задач.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция № 5, 1ч	да
6.	Тема 3.2. Виды событий. Произведение, сумма и разность событий. Случайное событие и его вероятность. Классическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные испытания. Формула Бернулли.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция № 6, 1ч	да
7.	Тема 3.3. Основные понятия математической статистики. Методы описательной статистики.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция № 7-8, 2ч	да
8.	Тема 3.3. Методы проверки статистических гипотез.	Специально оборудованная лекционная аудитория с мультимедийным проектором, экраном, ноутбуком, Доска	Лекция № 9-10, 2ч	да
9.	Тема 1.1. Применение элементов теории множеств для решения профессиональных задач.	Сборник задач, Таблички с формулами	Практическое занятие №1-2, 2ч	нет

10.	Тема 1.2. Обоснование истинности высказываний в профессиональной деятельности.	Сборник задач, Таблички с формулами	Практическое занятие № 3-4, 2ч	нет
11.	Тема 2.1. Установление зависимостей между величинами, используемыми в профессиональной деятельности.	Сборник задач, Таблички с формулами	Практическое занятие № 5-6, 2ч	нет
12.	Тема 2.2. Решение задач на процентное соотношение величин. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью и их графическое представление.	Сборник задач, Таблички с формулами	Практическое занятие № 7-8, 2ч	нет
13	Контрольная работа № 1 на тему: «Элементы теории множеств и математической логики. Приближенные вычисления».	Контрольная работа №1 (в распечатанном виде для каждого обучающегося)	Практическое занятие № 9, 1ч	да
14.	Тема 3.1. Применение комбинаторики для решения профессиональных задач.	Сборник задач, Таблички с формулами	Практическое занятие № 10, 1ч	нет
15.	Тема 3.2. Решение задач на нахождение вероятности событий. Применение основ теории вероятностей для решения профессиональных задач.	Сборник задач, Таблички с формулами	Практическое занятие № 11-12, 2ч	нет
16.	Тема 3.3. Проведение элементарной статистической обработки информации и результатов исследований.	Сборник задач, Таблица критических значений	Практическое занятие № 13, 1ч	нет
17.	Тема 3.3. Применение статистических методов для решения профессиональных задач.	Сборник задач, Таблица критических значений	Практическое занятие № 14-15, 2ч	нет
18	Контрольная работа № 2 на тему: «Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики».	Контрольная работа №2 (в распечатанном виде для каждого обучающегося)	Практическое занятие № 16, 1ч	да

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

**Примерные вопросы к контрольным работам в виде фонда оценочных средств
для проведения диагностической работы с целью оценивания достижения
результатов обучения**

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 по дисциплине «Математические методы решения
профессиональных задач»**

*на тему: «Элементы теории множеств и математической логики. Приближенные
вычисления».*

Вариант 1

- Пустое множество содержит:
а) 1 элемент; б) бесконечно много элементов; в) ни одного элемента
- Даны два множества: $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ и $B = \{9, 11, 13, 15\}$. Найдите множество $A \cap B$.
а) $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$; б) $\{11, 13, 15\}$; в) $\{9, 10, 12, 14\}$; г) $\{11, 12, 13, 14\}$
- Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос, любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 21 студент занимается спортом и слушает музыку. Сколько человек не увлекаются ни спортом, ни музыкой?
а) 10 б) 15 в) 18 г) 13
- Наука, изучающая законы и формы мышления, называется:
а) алгебра; б) геометрия; в) философия; г) логика.
- Какое из следующих высказываний является истинным?
а) город Париж – столица Англии; б) $3 + 5 = 2 + 4$;
в) $II + VI = VIII$; г) томатный сок вреден.
- Повествовательное предложение, в котором что-то утверждается или отрицается называется:
а) выражение; б) вопрос; в) высказывание; г) умозаключение.
- Константа, которая обозначается "1" в алгебре логики называется:
а) ложь; б) истина; в) правда; г) неправда.
- Объединение двух высказываний в одно с помощью союза «и» называется:
а) инверсия; б) конъюнкция; в) дизъюнкция; г) импликация.
- Какая из логических операций не является базовой?
а) конъюнкция; б) дизъюнкция; в) инверсия; г) эквивалентность.
- Двойное отрицание логической переменной равно:
а) 0; б) 1; в) исходной переменной; г) обратной переменной.
- Сравните величины и поставьте знак $> < =$
1 м 2 дм 1020 см
- Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- | | |
|---|-----------------|
| А) длительность урока | 1) 17,6 секунды |
| Б) серебряный норматив ГТО по бегу на 100 м для девочек 16–17 лет | 2) 45 минут |
| В) время в пути поезда Санкт-Петербург — Минеральные Воды | 3) 30 685 суток |
| Г) время одного оборота Урана вокруг Солнца | 4) 45 часов |

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г
---	---	---	---

--	--	--	--

13. Найдите абсолютную погрешность приближения числа 0,28 числом 0,3:

- а) -0,02 б) 0,02 в) -0,08 г) 0,08

14. Записать оценку величины m в виде двойного неравенства, если $m = 37 \pm 1$.

- а) $m \leq 36, m \geq 38$ б) $38 \leq m \leq 36$ в) $36 < m < 38$ г) $36 \leq m \leq 38$

15. Округлить число 356,2047 до сотых.

- а) 356,20 б) 400 в) 356,205 г) 356,21

16. Записать число 0,0385 в стандартном виде:

- а) $3,85 \cdot 10^{-2}$ б) $3,85 \cdot 10^2$ в) 385 г) $358 \cdot 10^{-4}$

18. Найдите приближенное значение разности $x - y$, если $x \approx 15,67$, $y \approx 3,1$.

- а) 12,6 б) 12,57 в) 12 г) 13

18. Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{2}{3}$ числом 0,7.

- а) 0,1 б) 0,05 в) 0,01 г) 0,07

19. Округлите число 3,12 до единиц и найдите (в процентах) относительную погрешность такого приближения, выразите ее в процентах.

- а) 3,12% б) 30% в) 3,85% г) 0,12%

20. Хоккейные коньки стоили 4500 руб. Сначала цену снизили на 20%, а потом эту сниженную цену повысили на 20%. Сколько стали стоить коньки после повышения цены?

- а) 3500 б) 4300 в) 4320 г) 3600

Вариант 2

1. Множества обозначаются ...

- а) большими латинскими буквами; б) малыми латинскими буквами

2. Даны два множества: $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ и $B = \{9, 11, 13, 15\}$. Найдите множество $A \cup B$.

- а) $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$; б) $\{11, 13, 15\}$; в) $\{9, 10, 12, 14\}$; г) $\{11, 12, 13, 14\}$

3. Среди 35 туристов одним английским языком владеют 11 человек, английским и французским – 5 человек. 9 человек не владеют ни английским, ни французским. Сколько человек владеют только французским языком?

- а) 15 б) 17 в) 8 г) 7

4. Что такое логика?

- а) это наука о суждениях и рассуждениях;
б) это наука, изучающая законы и методы накопления, обработки и сохранения информации с помощью ЭВМ;
в) это наука о формах и законах человеческого мышления и, в частности, о законах доказательных рассуждений;
г) это наука, занимающаяся изучением логических основ работы компьютера.

5. Логическая функция – это:

- а) простое высказывание; б) составное высказывание;
в) вопросительное предложение; г) логическая операция.

6. Как кодируется логическая переменная, принимающая значение "ЛОЖЬ"?

- а) 0; б) 1; в) 2; г) неправда

7. Какое из следующих высказываний является истинным?

- а) $8 + 2 = 3 + 5$; б) $III + V = VIII$;

- в) Число десять - нечетное; г) город Париж – столица Англии.
8. Логической операцией не является:
- а) логическое деление; б) логическое сложение;
- в) логическое умножение; г) логическое отрицание.
9. Объединение двух высказываний в одно с помощью оборота "если..., то..." называется:
- а) инверсия; б) конъюнкция; в) дизъюнкция; г) импликация.
10. Таблица, содержащая все возможные значения логического выражения, называется:
- а) таблица ложности; б) таблица истинности;
- в) таблица значений; г) таблица ответов.
11. Сравните величины и поставьте знаки $> < =$
- 2 ч 30 мин 150 мин

12. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- А) высота футбольных ворот стадиона «Динамо» 1) 65 см
- Б) высота собаки (овчарки) в холке 2) 74 км
- В) высота Останкинской башни 3) 244 см
- Г) длина Невы 4) 540 м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

13. Найдите абсолютную погрешность приближения числа 7,4 числом 7:
- а) -0,6 б) 0,6 в) -0,4 г) 0,4
14. Записать оценку величины m в виде двойного неравенства, если $m = 680 \pm 10$.
- а) $670 \leq m \leq 680$ б) $670 \leq m \leq 690$ в) $m \leq 670, m \geq 690$ г) $690 \leq m \leq 670$
15. Округлить число 734,256 до десятых.
- а) 734,2 б) 734,3 в) 730 г) 734,26
16. Записать число 165,3 в стандартном виде:
- а) 165 б) $1,653 \cdot 10^{-2}$ в) $1,653 \cdot 10^2$ г) $1,653 \cdot 10^{-1}$
17. Найдите приближенное значение суммы $x + y$, если $x \approx 18,237$, $y \approx 1,42$
- а) 19,66 б) 19,657 в) 19,7 г) 19,65
18. Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{1}{7}$ числом 0,14
- а) 0,02 б) 0,07 в) 0,01 г) 0,05
19. Округлите число 2,346 до 0,01 и найдите (в процентах) относительную погрешность такого приближения, выразите ее в процентах.
- а) 2,3% б) 0,17% в) 0,004% г) 23%
20. Среди 40 000 жителей города 60% не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 80% смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч по телевизору?
- а) 12800 б) 11200 в) 15000 г) 13100

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2 по дисциплине «Математические методы решения профессиональных задач»

на тему: «Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики».

Вариант 1

1. Сколькими способами можно рассадить 4 человек за столом?
 а) 60 б) 75 в) 24 г) 48
2. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать капитана и его ассистента;
 а) 110 б) 121 в) 120 г) 140
3. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найти вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.
 а) 0,52 б) 0,48 в) 0,42 г) 0,78
4. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.
 а) 0,15 б) 0,85 в) 0,7 г) 0,56
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза.
 а) 0,125 б) 0,615 в) 0,375 г) 0,252
6. Предметом математической статистики является изучение ...
 а) случайных величин по результатам наблюдений; б) случайных явлений;
 в) совокупностей; г) числовых характеристик.
7. Какое из следующих измерений относится к классу порядка измерения шкал:
 а) числа, кодирующие темперамент;
 б) академический ранг как мера продвижения по службе;
 в) метрическая система измерения расстояния;
 г) телефонные номера.
8. К качественным видам относятся следующий признак:
 а) рост человека; б) цвет волос; в) вес человека г) телефонные номера
9. Среднее арифметическое значение совокупности это:
 а) значение признака в середине вариационного ряда;
 б) полуразность максимального и минимального значений вариационного ряда;
 в) полусумма максимального и минимального значений вариационного ряда;
 г) отношение суммы всех величин совокупности к их общему числу.
10. Медианой вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на ранжированного ряда наблюдений.
 а) минимум; б) максимум; в) начало; г) середину
11. Среднее арифметическое данных: 6, 7, 7, 5, 6, 7, 5, 7, 8, 5 равно:
 а) 7 б) 6,3 в) 6 г) 5
12. Мода вариационного ряда 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 7, 7, 8, 9 равна ...
 а) 7; б) 8; в) 2; г) 4.

13. Медиана вариационного ряда 3, 2, 3, 5, 4, 6, 4, 6, 7, 10, 9 равна ...
 а) 5; б) 4 в) 6 г) 3
14. Размах вариационного ряда 104, 87, 101, 130, 148, 92, 97, 105, 134, 121 равен:
 а) 61; б) 60; в) 75; г) 30
15. Уровень статистической значимости $p=0,001$ является:
 а) низким б) средним в) высоким г) нет такого уровня статистической значимости

Вариант 2

1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?
 а) 60 б) 120 в) 100 г) 85
2. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать из них двух игроков для прохождения допинг-контроля?
 а) 22 б) 110 в) 60 г) 55
3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что студентом будет сдан хотя бы один экзамен.
 а) 0,22 б) 0,018 в) 0,998 г) 0,648
4. Три студентки живут в одной комнате и по очереди моют посуду. Вероятность разбить тарелку для первой студентки равна 0,03, для второй 0,01, для третьей — 0,04. На кухне раздался звон разбитой тарелки. Найти вероятность того, что третья студентка мыла тарелку.
 а) 0,5 б) 0,8 в) 0,34 г) 0,62
5. Вероятность того, что футболист забьёт гол с одиннадцатиметрового штрафного удара, равна 0,6. Найдите вероятность того, что в серии из пяти ударов он забьёт ровно три гола.
 а) 0,5251 б) 0,3456 в) 0,4752 г) 0,676
6. Совокупность всех возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определенной случайной величины называется ...
 а) выборкой; б) вариантами;
 в) генеральной совокупностью; г) выборочной совокупностью
7. Какую шкалу используют при измерении времени:
 а) интервальную; б) отношений; в) Чеддока; г) номинативную
8. К количественным видам относятся следующий признак:
 а) рост человека; б) цвет волос; в) цвет глаз; г) марка машины
9. Мода — это:
 а) максимальное значение признака совокупности;
 б) наиболее часто встречающееся значение признака;
 в) среднее арифметическое значение совокупности;
 г) минимальное значение признака совокупности.
10. Размах — это:
 а) разница между максимальным и минимальным значениями;
 б) максимальное значение признака совокупности;
 в) среднее арифметическое значение совокупности;
 г) минимальное значение признака совокупности.
11. Среднее арифметическое данных: 10, 9, 9, 8, 10, 9, 8, 10, 9, 6 равно:
 а) 10 б) 8,2 в) 8,8 г) 9
12. Мода вариационного ряда 2, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9 равна ...

- а) 3; б) 5; в) 7; г) 9
13. Медиана вариационного ряда 2, 1, 2, 4, 3, 4, 7, 4, 7, 8, 9 равна ...
- а) 4; б) 7 в) 8 г) 9
14. Размах вариационного ряда 85, 91, 102, 120, 130, 95, 87, 100, 110, 115 равен:
- а) 60; б) 40; в) 25; г) 30
15. При каком минимальном уровне значимости принято отвергать нулевую гипотезу?
- а) 5% уровень б) 7 % уровень в) 9 % уровень г) 10% уровень

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

Методические указания для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья

Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптируется при необходимости для лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) или инвалидностью и дополняется нижеследующими особенностями при ее освоении такими обучающимися. Используются следующие образовательные технологии с учетом их адаптации для лиц с ОВЗ или инвалидностью:

Образовательные технологии	Цель	Адаптированные методы
Проблемное обучение	Развитие познавательной способности, активности, творческой самостоятельности лиц с ОВЗ или инвалидностью	Поисковые методы, постановка познавательных задач с учетом индивидуального социального опыта и особенностей лиц с ОВЗ или инвалидностью
Концентрированное обучение	Создание блочной структуры учебного процесса, наиболее отвечающей особенностям здоровья лиц с ОВЗ или инвалидностью	Методы, учитывающие динамику и уровень работоспособности лиц с ОВЗ или инвалидностью
Модульное обучение	Гибкость обучения, его приспособление к индивидуальным потребностям лиц с ОВЗ или инвалидностью	Индивидуальные методы обучения: индивидуальный темп и график обучения с учетом уровня базовой подготовки лиц с ОВЗ или инвалидностью
Дифференцированное обучение	Создание оптимальных условий для выявления индивидуальных интересов и способностей лиц с ОВЗ или инвалидностью	Методы индивидуального личностно-ориентированного обучения с учетом ОВЗ и личностных психолого-физиологических особенностей
Развивающее обучение	Ориентация учебного процесса на потенциальные возможности лиц с ОВЗ или инвалидностью	Вовлечение обучающихся с ОВЗ и инвалидов в различные виды деятельности, развитие сохранных возможностей
Социально-активное, интерактивное обучение	Моделирование предметного и социального содержания учебной деятельности лиц с ОВЗ или инвалидностью	Методы социально-активного обучения, игровые методы с учетом социального опыта лиц с ОВЗ или инвалидностью

Рефлексивное обучение, развитие критического мышления	Интерактивное вовлечение лиц с ОВЗ или инвалидностью в групповой образовательный процесс	Интерактивные методы обучения, вовлечение лиц с ОВЗ или инвалидностью в различные виды деятельности, создание рефлексивных ситуаций по развитию адекватного восприятия собственных особенностей
---	--	---

Имеется возможность беспрепятственного доступа обучающихся с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, в учебные помещения и другие помещения ФГБОУ ВО «ВЛГАФК» (на первые этажи) (имеются пандусы, поручни, расширенные дверные проёмы) по адресам:

182105, Псковская область, г Великие Луки, пл. Юбилейная, д 4;

182105, Псковская область, г. Великие Луки, пл. Юбилейная, д.4, корп 1.

Имеется возможность их пребывания в указанных помещениях. Лифтов нет. Аудитории для проведения учебных занятий с такими обучающимися располагаются на первых этажах.

Образовательные технологии применяются как с использованием универсальных, так и специальных информационных и коммуникационных средств, в зависимости от вида и характера ограниченных возможностей здоровья или инвалидностью обучающихся.

На уровне специальных приемов, используемых при обучении лиц с ОВЗ и инвалидностью используются следующие: 1) приемы, обеспечивающие доступность учебной информации (рельефное письмо и осязательное чтение для обучающихся с нарушениями зрения, жестовая речь для обучающихся с нарушениями слуха, дозированность учебной нагрузки и др.); 2) специальные приемы организации обучения (алгоритмизация учебной деятельности с учетом особенностей нарушения, специфика структурного построения занятий, и др.). 3) логические приемы переработки учебной информации (конкретизация, установление аналогий по образцам, обобщение по доступным признакам изучаемых объектов и явлений и др.); 4) приемы использования технических средств, специальных приборов и оборудования (технические средства по перекодированию зрительной и слуховой информации в доступные для сохраненных анализаторов сигналы, использование приборов, усиливающих зрительную, тактильную, слуховую и др. информацию).

Проводится дополнительная индивидуальная работа с преподавателем (индивидуальные консультации), работа с лекционным и дополнительным материалом, беседа, морально-эмоциональная поддержка и стимулирование, индивидуальная учебная работа, то есть дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, или им требуется проведение индивидуальной учебно-воспитательной работы.

Обучающимся осуществляется самостоятельная работа: работа с книгой и другими источниками информации, план-конспекты, реферативные (воспроизводящие), реконструктивно-вариативные, эвристические, творческие самостоятельные работы, проектные работы, онлайн технологии сети «Интернет».

Конкретные формы и виды контактной работы лиц с ОВЗ или инвалидностью устанавливаются преподавателем индивидуально для каждого обучающегося или, при

возможности, для нескольких обучающихся. Выбор форм и видов контактной и самостоятельной работы лиц с ОВЗ или инвалидностью осуществляется с учетом их способностей, особенностей восприятия и готовности к освоению учебного материала. Формы работы устанавливаются с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге, на компьютере или с использованием иной техники, в форме тестирования и т.п.). При необходимости обучающимся предоставляется дополнительное время для консультаций и выполнения заданий.

К реализации дисциплины (модуля), в том числе при процедуре оценки уровня сформированности компетенций (в соответствии с запросами обучающихся) привлекаются услуги ассистентов, сурдопереводчиков¹, специалистов² по специальным техническим и программным средствам обучения.

Обучение лиц с нарушениями слуха предполагает использование мультимедийных средств и других технических средств для приема-передачи учебной информации в доступных формах.

Для слабовидящих обучающихся предусмотрена возможность просмотра удаленных объектов (например, текста на доске или слайда на экране).

Обучение лиц с нарушениями зрения предполагает использование технических средств для приема-передачи учебной информации в доступных формах.

Для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата в учебных аудиториях выбирается место с возможностью беспрепятственного к нему доступа на инвалидной коляске.

Дополнительное учебно-методическое и информационное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины (модуля):

- библиотечный фонд помимо учебной литературы включает справочно-библиографические и периодические издания в соответствии с перечнем указанным в рабочей программе дисциплины (модуля);

- обеспечивается доступ к ним обучающихся с ОВЗ и инвалидов с использованием специальных технических средств.

Дополнительное материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)³:

- Аппаратно-программный комплекс «Читающая машина» для лиц с нарушениями зрения;

- Увеличивающее телевизионное устройство для слабовидящих ElecGeste EM-302 для лиц с нарушениями зрения;

- использование звукоусиливающей аппаратуры для лиц с нарушениями слуха.

Использование оценочных средств для определения уровня сформированности компетенций обучающихся с ОВЗ и инвалидов проводится с учетом индивидуальных

¹ ФГБОУ ВО «ВЛГАФК» заключён договор № б/н от 01.12.2017 года на оказание, в случае необходимости, услуг сурдопереводчика

² Приказом ректора № 201 от 25.10.2016 назначены ответственные за оказание технической помощи по каждому конкретному адресу (по каждому зданию)

³ 3 октября 2018 года заключено соглашение о сотрудничестве между ФГБОУ ВО «Российский государственный университет физической культуры, спорта, молодежи и туризма (ГЦОЛИФК)», утверждённым в качестве образовательной организации высшего образования, подведомственной Министерству спорта Российской Федерации, на базе которой создан Ресурсный учебно-методический центр (РУМЦ) по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, и ФГБОУ ВО «Великолукская государственная академия физической культуры и спорта». На основании пункта 3.1.4. этого соглашения о сотрудничестве РУМЦ предоставляет во временное пользование образовательной организации высшего образования технические средства обучения и оборудование Центра коллективного пользования для обучения студентов с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья.

особенностей восприятия, переработки материала, выполнения заданий. Материалы оценочных средств при необходимости представляются обучающимся в печатном и (или) электронном, и (или) аудиоформате, т.е. в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Текущий контроль результатов обучения осуществляется преподавателем в процессе проведения занятий семинарского типа, а также выполнения индивидуальных работ и домашних заданий, или в режиме тренировочного тестирования в целях получения информации о выполнении обучаемым требуемых действий в процессе учебной деятельности; правильности выполнения требуемых действий; соответствия формы действия данному этапу усвоения учебного материала, что позволяет своевременно выявить затруднения и отставание обучающихся с ОВЗ и инвалидов и внести коррективы в учебный процесс. При необходимости предусматривается увеличение времени на подготовку или выполнение заданий.

Формы проведения промежуточной аттестации для обучающихся с ОВЗ и инвалидов устанавливаются с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п.). При необходимости предусматривается увеличение времени на подготовку. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов, при необходимости предоставляется техническая помощь.

ПРИЛОЖЕНИЕ №3

Тексты/конспекты лекций

Лекция 1

ТЕМА: «ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ»

Содержание Лекции:

1. *Множества. Основные понятия.*
2. *Отношения между множествами.*
3. *Операции над множествами.*

1. Множества. Основные понятия.

Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Понятие множества настолько общее, что невозможно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова «*множество*» его синонимами: *совокупность, собрание, объединение элементов* и т.п.

Объекты, из которых образовано множество, называются его *элементами*.

Например:

- ♥ множество (набор) карандашей в коробке;
- ♥ множество (класс) хвойных деревьев;
- ♥ множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной (окружность).

Множества принято обозначать прописными латинскими буквами: *A, B, C, D, ..., Z*, а элементы множества – малыми: *a, b, c, d, ..., x, y, z*.

Утверждение: «элемент *a* принадлежит множеству *A*» символически записывается так: $a \in A$.

$a \notin A$ - означает, что элемент *a* не принадлежит множеству *A*.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми множествами*.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

- N* – множество натуральных чисел;
- Z* – множество целых чисел;
- Q* – множество рациональных чисел;
- R* – множество действительных чисел;
- I* – множество иррациональных чисел;
- C* – множество комплексных чисел.

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Существуют два способа задания множества.

1. Перечисление всех элементов.

Множество можно задать, перечислив все его элементы. В таком случае названия всех элементов множества записывают в строку, отделяя запятыми, и заключают в фигурные скобки. Например: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2. Указание характеристического свойства.

Множество можно задать, сформулировав характеристическое свойство.

Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает один элемент, который

ему не принадлежит.

Например: $A = \{a \mid a \in \mathbb{N} \text{ и } a < 10\}$ (множество натуральных чисел меньших 10)

Множества могут содержать как конечное, так и бесконечное число элементов.

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются конечными множествами. Все элементы этих множеств можно перебрать (пересчитать). Конечные множества, содержащие n элементов, называются **n -элементными множествами**.

Например: множество, содержащее один элемент - одноэлементное множество, множество, содержащее пять элементов - пятиэлементное множество и т.д. Утверждение: «Число элементов множества A равняется k » символически записывается так: $n(A) = k$.

В математике приходится постоянно сталкиваться **бесконечными множествами** (нельзя сказать, сколько элементов в этих множествах, нельзя их полностью перебрать). Например: множества натуральных, целых, четных, нечетных чисел и многие другие.

Для удобства вводится также и множество с числом элементов равным нулю, т.е. множество, не имеющее элементов.

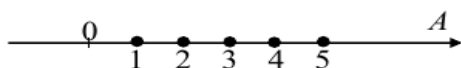
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\emptyset$, $n(\emptyset) = 0$.

Например, множество русских слов, начинающихся на букву Ъ. Таких слов нет, поэтому это пустое множество, численность его элементов равна нулю.

Числовые множества можно изобразить на координатной прямой. Например:

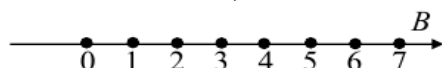
а) $A = \{x, x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$

A - это множество, состоящее из первых пяти натуральных чисел, на координатной прямой отмечается пятью точками.



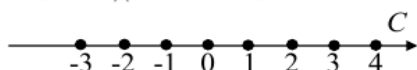
б) $B = \{x, x \in \mathbb{N}_0, x \leq 7\}$

B - это множество, состоящее из 8 элементов, включая ноль.



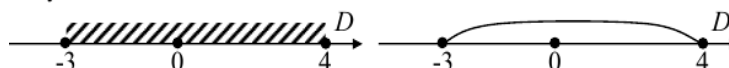
в) $C = \{x, x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 5\}$

C - это множество целых чисел от -3 до 4, на координатной прямой обозначается тоже отдельными точками.



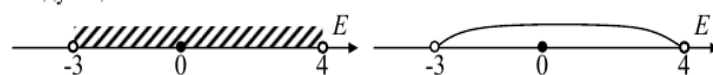
г) $D = \{x, x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 4\}$

D - это бесконечное множество действительных чисел на отрезке от -3 до 4, который можно записать еще так: $[-3, 4]$. На координатной прямой замкнутый промежуток можно обозначить следующими способами:



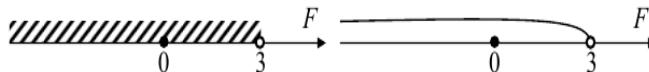
д) $E = \{x, x \in \mathbb{R}, -3 < x < 4\}$

E - это бесконечное множество действительных чисел на интервале от -3 до 4, который можно записать еще так: $(-3, 4)$. На координатной прямой открытый промежуток можно обозначить следующими способами:



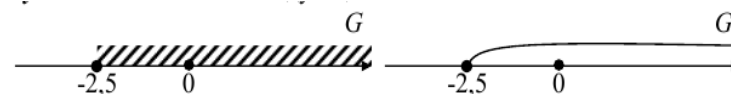
е) $F = \{x, x \in \mathbb{R}, x < 4\}$

F – это бесконечное множество действительных чисел меньших 4, записывают так: $(-\infty, 4)$. На координатной прямой луч можно обозначить следующими способами:



ж) $G = \{x, x \in \mathbb{R}, x \geq 2,5\}$

G – это бесконечное множество действительных чисел больших либо равных 2,5, записывают так: $[2,5; \infty)$. На координатной прямой луч можно обозначить следующими способами:



Множество B является **подмножеством** множества A , если каждый элемент множества B является также элементом множества A . В этом случае множество A является **надмножеством** B . Записывают это $B \subset A$. Прочитать эту запись можно по-разному:

- ♥ B является подмножеством A ,
- ♥ A является надмножеством B ,
- ♥ B включается во множество A ,
- ♥ A включает в себя множество B .

Например, A – множество двузначных чисел, а B – множество двузначных чисел, кратных 5.

Считают, что каждое множество A является **подмножеством самого себя**. $A \subset A$.

Пустое множество является **подмножеством любого множества**: $\emptyset \subset A$.

Любое непустое подмножество B множества A , не совпадающее со множеством A , называется **собственным подмножеством**.

Для множества A пустое множество $\emptyset$ и само множество A называются **несобственными подмножествами множества A** .

Множество, которое включает все рассматриваемые множества, называется **универсальным**. Обозначается U .

Для каждого множества, состоящего из n элементов можно образовать 2^n подмножеств.

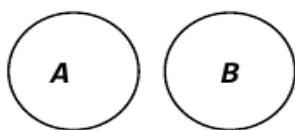
Любое множество можно изобразить графически, нарисовав замкнутый контур и представив себе, что элементы этого множества изображены точками, находящимися внутри этого контура. Показывать на рисунке точки не обязательно. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника. Такой способ изображения множеств носит название диаграмм Венна (или кругов Эйлера). Чаще называется **диаграммами Эйлера-Венна**.

Например, числовые множества можно изобразить так.



2. Отношения между множествами.

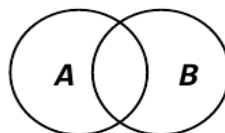
Если множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества *находятся в отношении непересечения*. Записывают это так: $A \cap B = \emptyset$.



Например, A – множество треугольников, B – множество трапеций. Эти множества не имеют общих элементов, т. е. не существует фигуры, которая была бы одновременно и треугольником, и трапецией. Поэтому множества A и B находятся в отношении непересечения.

Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно и A , и B , то говорят, что эти множества *находятся в отношении пересечения*. Записывают это так: $A \cap B \neq \emptyset$.

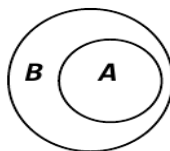
Множества A и B *находятся в общем положении пересечения*, если существует элемент (хотя бы один), принадлежащий исключительно множеству A , элемент, принадлежащий исключительно множеству B , а также элемент, принадлежащий обоим множествам.



Например, A – множество прямоугольников, B – множество ромбов. Множества A и B находятся в общем пересечения, так как существует фигура, которая

одновременно и ромбом, и прямоугольником – это квадрат, а так же есть прямоугольники, которые не являются ромбами, и есть ромбы, которые не являются прямоугольниками.

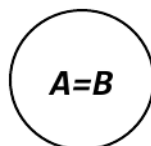
Два множества *находятся в отношении включения*, если все элементы одного множества являются элементами другого. Например, если все элементы множества A являются элементами множества B , то A включается в B , а B включает в себя множество A . $A \subset B$.



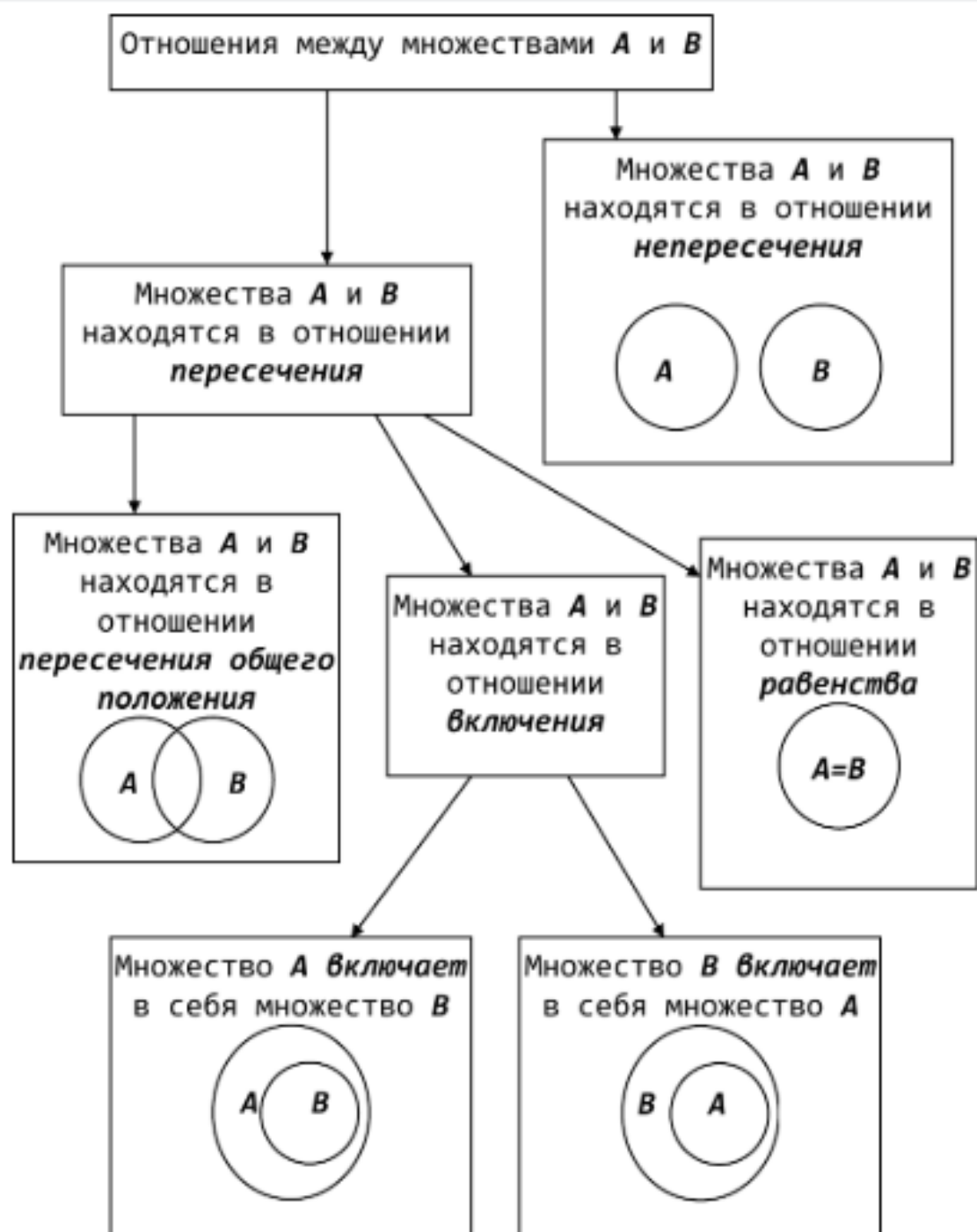
Например, $A = \{12, 21, 11, 22\}$, $B = \{10, 11, 12, 20, 21, 22\}$. $A \subset B$, так как все элементы множества A являются одновременно и элементами множества B .

Два множества A и B *находятся в отношении равенства*, если каждый элемент A будет также являться элементом B , и каждый элемент множества B будет также являться элементом A , т.е. $A \subset B$ и $B \subset A$.

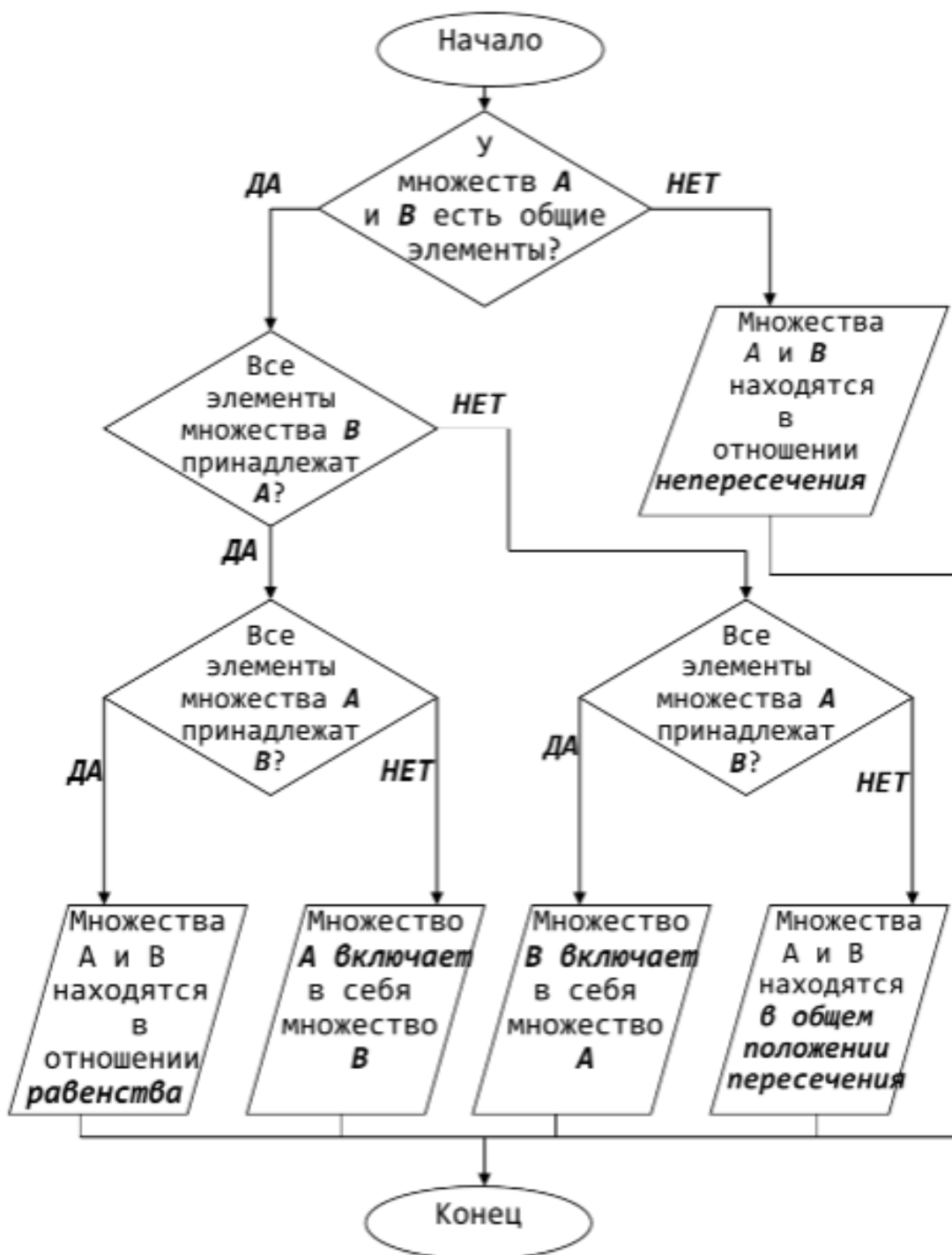
$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$



Например, $A = \{a, a \in \mathbb{N}, a < 6\}$, $B = \{b, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq b \leq 5\}$.
Множества A и B равны, так как состоят из одних и тех же элементов: 1, 2, 3, 4, 5.



Алгоритм определения вида отношения между двумя множествами A и B



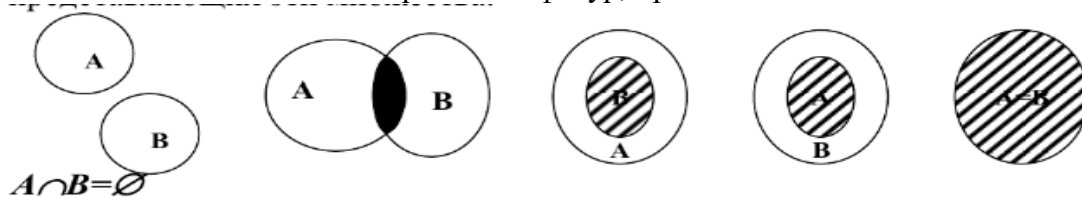
3. Операции над множествами.

Над множествами, как и над многими другими математическими объектами, можно совершать различные операции. В результате операций из исходных множеств получаются новые. Операции бывают **бинарные** (которые выполняются над двумя множествами) и **унарные** (которые выполняются над одним множеством). К бинарным операциям относятся: пересечение, объединение, вычитание, симметрическая разность, декартово или прямое произведение и др. К унарным операциям можно отнести: нахождение мощности множества, разбиение множества и др. Рассмотрим основные из них.

Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

На диаграммах Эйлера — Венна результат операций пересечения множеств изображается как общая часть геометрических фигур, представляющих эти множества.



Процесс нахождения множества $A \cap B$ называется **операцией пересечения**.

Операцию пересечения можно выполнить над любыми множествами, вне зависимости от того, в каких отношениях находятся сами множества, т. е. пересечение любых множеств всегда существует и единственно.

Рассмотрим пример.

A – множество однозначных натуральных чисел, кратных 3

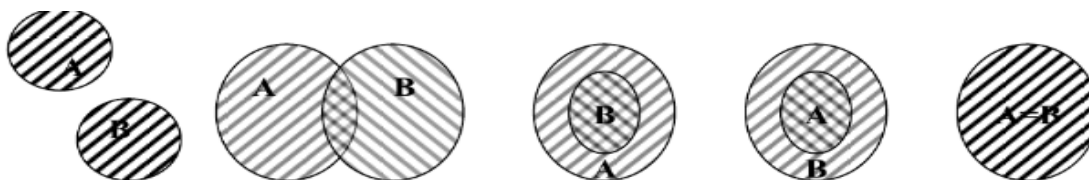
$$B = \{1, 3, 5, 9, 11\}$$

$$A \cap B = \{3, 9\}$$

Объединением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

На диаграммах Эйлера — Венна результат операций объединения множеств изображается как часть плоскости, занимаемая геометрическими фигурами, представляющими эти множества.



Процесс нахождения множества $A \cup B$ называется **операцией объединения**.

Операцию объединения можно выполнить над любыми множествами, вне зависимости от того, в каких отношениях находятся сами множества, т. е. объединение любых множеств всегда существует и единственно.

Рассмотрим пример.

A – множество однозначных натуральных чисел, кратных 3

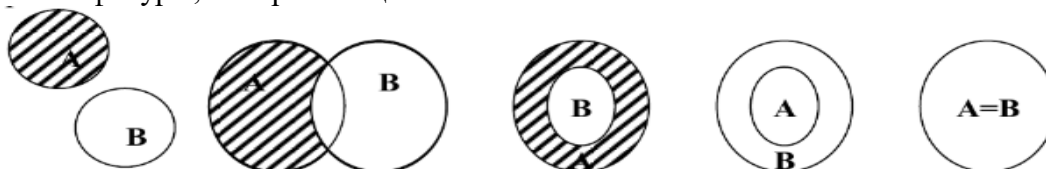
$B = \{1, 3, 5, 9, 11\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 9, 11\}$

Разностью множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

На диаграммах Эйлера — Венна результат операций вычитания множества B из множества A изображается как часть геометрической фигуры, представляющей множество A после удаления фигуры, изображающей множество B .



Процесс нахождения множества $A \setminus B$ называется **операцией вычитания**.

Операцию вычитания можно выполнить над любыми множествами, вне зависимости от того, в каких отношениях находятся сами множества, т. е. разность любых множеств всегда существует и единственна.

Пример 1.

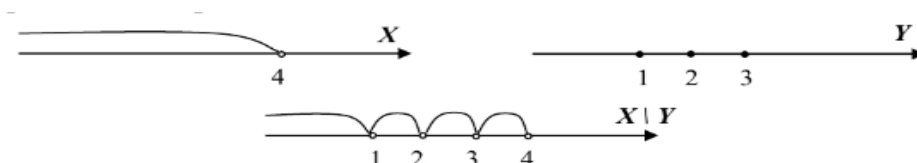
A – множество однозначных натуральных чисел, кратных 3

$B = \{1, 3, 5, 9, 11\}$

$A \setminus B = \{6\}$, $B \setminus A = \{1, 5, 11\}$,

Пример 2

$X = \{x, x \in \mathbb{R}, x < 4\}$, $Y = \{x, x \in \mathbb{N}, x < 4\}$. Найдем $X \setminus Y$. Изобразим их на координатной прямой.



В этом случае $X \setminus Y$ записывается как объединение непересекающихся множеств $X \setminus Y = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$

Если $B \subset A$, то дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее все элементы множества A , которые не принадлежат множеству B .

$$B / A = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Рассмотрим пример.

$A = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17, 37\}$, $B = \{1, 3, 5, 9, 11\}$,

$$B/A = \{13, 17, 37\}.$$

Симметрическая разность двух множеств—это множество, включающее все элементы исходных множеств, не принадлежащие одновременно обоим исходным множествам. Другими словами, если есть два множества A и B , их симметрическая разность есть объединение элементов A , не входящих в B , с элементами B , не входящими в A . На письме для обозначения симметрической разности множеств A и B используется обозначение: $A \Delta B$.

Симметрическую разность можно ввести двумя способами:

♥ симметрическая разность двух заданных множеств A и B — это такое множество $A \Delta B$, куда входят все те элементы первого множества, которые не входят во второе множество, а, также те элементы второго множества, которые не входят в первое множество:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

♥ симметрическая разность двух заданных множеств A и B — это такое множество $A \Delta B$, куда входят все те элементы обоих множеств, которые не являются общими для двух заданных множеств.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Понятие симметрической разности можно обобщить на число множеств, большее двух.

Пример. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. $A \Delta B = \{1, 2, 5, 6\}$
 $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{5, 6\}$, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 5, 6\}$.
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 5, 6\}$

Сначала выполняются операции дополнения и пересечения, а затем объединения и разности, которые имеют одинаковый приоритет выполняются в порядке записи. Симметрическая разность рассматривается как комбинация операций объединения, вычитания и пересечения. Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

3. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Свойства Операции	Коммутативность	Ассоциативность
Пересечение	① $A \cap B = B \cap A$	③ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Объединение	② $A \cup B = B \cup A$	④ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Вычитание	Не обладает	Не обладает
Симметрическая разность	⑤ $A \Delta B = B \Delta A$	⑥ $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
Декартово произведение	Не обладает	Строго говоря, тождество ассоциативности $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ не имеет места, но в силу существования естественного взаимно однозначного соответствия между множествами $A \times (B \times C)$ и $(A \times B) \times C$ этим различием можно зачастую пренебречь

⑦ Дистрибутивность объединения множеств относительно пересечения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

⑧ Дистрибутивность пересечения множеств относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

⑨ **Дистрибутивность** пересечения множеств относительно разности $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

⑩ **Дистрибутивность** пересечения множеств относительно симметрической разности: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

⑪ **Дистрибутивность** декартова произведения относительно объединения $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

⑫ **Дистрибутивность** декартова произведения относительно пересечения $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

⑬ **Дистрибутивность** декартова произведения относительно симметрической разности $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$.

⑭ **Дистрибутивность** декартова произведения относительно вычитания множеств $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

	Пересечение	Объединение	Вычитание	Симметрическая разность	Декартово произведение
A и $\emptyset$	⑮ $A \cap \emptyset = \emptyset$	⑯ $A \cup \emptyset = A$	⑰ $A \setminus \emptyset = A$ ⑱ $\emptyset \setminus A = \emptyset$	⑲ $A \Delta \emptyset = A$	⑳ $A \times \emptyset = \emptyset$
A и A	㉑ $A \cap A = A$	㉒ $A \cup A = A$	㉓ $A \setminus A = \emptyset$	㉔ $A \Delta A = \emptyset$	
A и A'	㉕ $A \cap A' = \emptyset$	㉖ $A \cup A' = U$	㉗ $A \setminus A' = A$	㉘ $A \Delta A' = U$	
Законы Де Моргана	㉙ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	㉚ $(A \cup B)' = A' \cap B'$			

Лекция 2

ТЕМА: «ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ»

Содержание Лекции:

1. Простые и сложные высказывания.
2. Основные логические операции.
3. Таблицы истинности.
4. Законы логики.
5. Правила преобразования логических выражений.

1. Простые и сложные высказывания.

Основные понятия.

Логика (от греч. logos — слово, понятие, рассуждение, разум) — наука о законах и операциях правильного мышления.

Логика — это наука о формах и способах мышления. Это учение о способах рассуждений и доказательств.

Логика — это наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые выполняются не только над числами, но и над другими математическими объектами, в том числе и над высказываниями.

Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний и принимает во внимание только истинность или ложность высказывания.

Логически правильный вывод позволяет из имеющихся истин получать новые истины с помощью чистого рассуждения, без обращения к опыту, интуиции и т. п.

В формальной логике правильность рассуждения зависит только от его формы и не зависит от конкретного содержания.

Формальная логика содержит в себе некоторые основные понятия, такие как:

- * высказывание,
- * истинность высказывания и
- * вывод.

Высказывание — грамматически правильное повествовательное предложение. Для высказывания важно его содержание, про него можно сказать, истинно оно или ложно.

Существует еще вариант «Я пока не знаю». Например, предложение «*На Марсе есть жизнь*» является высказыванием, но считать ли его истинным или ложным науке не известно, пока это вопрос договора. Предложения типа «*Который час?*» или «*Здравствуйте!*» не являются высказываниями, так как никто и никогда не сможет сказать про них — истинны они или ложны.

Обычно считают, что высказывание может принимать два истинностных значения «**истина**» или «**ложь**». Истинностные значения сложных высказываний обычно записывают в таблице истинности.

Вывод — это рассуждение по правилам логики, в ходе которого из исходных высказываний (посылок) получают новое высказывание (заключение). Например, правильным является рассуждение (или вывод), следующее схеме (правилу): «*Если есть первое,*

то есть и второе; есть первое; значит, есть второе». Вместо слов «первое» и «второе» можно поставить любые истинные высказывания и получить истинное заключение. По этой схеме из истинных высказываний «*Если светит солнце, то сейчас день*» и «*Светит солнце*» вытекает истинность высказывания «*Сейчас день*».

Формальная логика работает с логическими константами и переменными. Слова «первое» и «второе» в примере выше — это переменные формальной логики. Они имеют самостоятельное содержание. Их принято обозначать буквами.

Например, высказывания «*Все ученики любят учиться*» и «*Все медведи любят мед*» различаются по смыслу. Более того, первое высказывание ложно, а второе истинно. Но в формальной логике содержательные части заменяются переменными, и оба высказывания принимают вид: «*Все S есть P*».

Константы или логические связки («не», «и», «или», «если, то», «весь» и т. д.) не имеют содержания, они используются для получения новых содержательных выражений из других.

Использование констант и исходных высказываний для составления новых, сложных высказываний называют **логическими операциями**.

Логическое высказывание — это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение "6 — четное число" следует считать высказыванием, и оно истинно. Предложение "Рим — столица Франции" тоже высказывание, и оно ложно.

Высказывание не может быть выражено повелительным или вопросительным предложением, оценка истинности или ложности которых невозможна. Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков.

Разумеется, не всякое предложение является логическим высказыванием. Высказываниями не являются, например, предложения "Ученик десятого класса" и "Информатика — интересный предмет".

Первое предложение ничего не утверждает об ученике, а второе использует слишком неопределённое понятие "интересный предмет". Вопросительные и восклицательные предложения также не являются высказываниями, поскольку говорить об их истинности или ложности не имеет смысла.

Предложения типа "В городе A более миллиона жителей", "У него голубые глаза" не являются высказываниями, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения: о каком конкретно городе или человеке идет речь. Такие предложения называются **высказывательными формами**.

Высказывательная форма — это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения — является ли оно истинным или ложным. Заметим, что зачастую трудно установить истинность высказывания. Так, например, высказывание "Площадь поверхности Индийского океана равна 75 млн кв. км" в одной ситуации можно посчитать ложным, а в другой — истинным. Ложным — так как указанное значение неточное и вообще не является постоянным. Истинным — если рассматривать его как некоторое приближение, приемлемое на практике.

Высказывания имеют определенную логическую форму. Понятие о предмете мысли называется *субъектом* и обозначается буквой S, а понятие о свойствах и отношениях

предмета мысли называется *предикатом* и обозначается буквой *P*. Оба эти понятия - субъект и предикат называются *терминами* суждения.

Отношения между субъектом и предикатом выражаются связкой «*есть*», «*не есть*», «*является*», «*состоит*» и т.д.

Таким образом, каждое высказывание состоит из трех элементов - *субъекта*, *предиката* и *связки* (двух терминов и связки). Состав суждения можно выразить общей формулой «*S есть P*» или «*S не есть P*».

Логические связки.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "*не*", "*и*", "*или*", "*если . . . , то*", "*тогда и только тогда*" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными**. Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными (простыми)**.

Простое высказывание — высказывание, в составе которого нет других высказываний. Оно состоит из одного утверждения и не может быть разделено на более мелкие логические единицы, которые имеют смысл.

Примеры простых высказываний: «Вода нагрета до 1000», «Вода кипит», «Все львы — хищники», «Некоторые хищники не являются дикими животными», «Иван старше Петра», «Пётр не старше Ивана».

Сложное высказывание — высказывание, в составе которого имеется другое высказывание (или несколько других высказываний). Сложные высказывания образуются из простых с помощью внешних, пропозициональных связок («неверно, что», «и», «или», «если . . . , то . . . », «если и только если» и др.).

Примеры сложных высказываний: «Если вода нагрета до 1000, то вода кипит», «Все львы — хищники, и ни одна лошадь не хищник», «Иван старше Петра, или Пётр старше Ивана».

- Например, из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "*и*" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*", понимаемое как "*Петров — врач, хорошо играющий в шахматы*".

- При помощи связки "*или*" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "*Петров — врач или шахматист*", понимаемое в алгебре логики как "*Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно*".

Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через *A* обозначено высказывание "*Тимур поедет летом на море*", а через *B* — высказывание "*Тимур летом отправится в горы*". Тогда составное высказывание "*Тимур летом побывает и на море, и в горах*" можно кратко записать как *A и B*. Здесь "*и*" — логическая связка, *A*, *B* — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "*истина*" или "*ложь*", обозначаемые, соответственно, "*1*" и "*0*".

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение: **отрицание**, **конъюнкция**, **дизъюнкция**, **импликация**, **эквивалентность**.

Если составное высказывание выразить в виде формулы, в которую войдут логические переменные и знаки логических операций, то получится логическое выражение, значение которого можно вычислить.

Значением логического выражения могут быть только **ЛОЖЬ** или **ИСТИНА**.

2. Основные логические операции.

Основные логические операции в алгебре логики (**булевой алгебре**) **включают** отрицание (инверсию), дизъюнкцию (логическое сложение), конъюнкцию (логическое умножение) и импликацию (логическое следование). **Эти операции работают с двумя значениями: истиной (1) и ложью (0).**

1) Логическое отрицание (инверсия).

Логическая связка **ИНВЕРСИЯ** (от лат. *inversion* - переворачиваю).

Название – **отрицание**.

Обозначение: в алгебре высказываний **A** или $\neg A$,

В естественном языке ему соответствует выражение "**неверно, что . . .**", относящееся ко всему высказыванию, или присоединение союза "**не**" к некоторой части простого высказывания.

Например, высказывание "**Число 10 – четное**" = ИСТИНА, отрицанием его является высказывание "**Число 10 – нечетное**" = ЛОЖЬ.

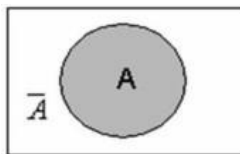
Или высказывание "**Число 10 - отрицательное**" = ЛОЖЬ, его отрицание "**Неверно, что число 10 - отрицательное**" = ИСТИНА.

Отрицанию соответствует следующая таблица истинности:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Вывод: результат будет ложным, если исходное выражение истинно, и наоборот.

В алгебре множеств логическому отрицанию соответствует операция **дополнения до универсального множества**, т.е. множеству получившемуся в результате отрицания множества **A** соответствует множество $\bar{A}$, дополняющее его до универсального множества.



2) Логическое умножение (конъюнкция)

Логическая связка **КОНЪЮНКЦИЯ** (от лат. *conjunctio* - связываю).

Название – **логическое умножение**.

Обозначение: в алгебре высказываний **A&B** или $A \wedge B$,

В естественном языке ему соответствует союз "**и**".

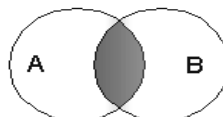
Например, из двух простых высказываний $A = \text{"На улице светит солнце"}$ и $B = \text{"На улице ясная погода"}$ построим сложное, используя союз-связку "**и**". Получим "**На улице светит солнце и ясная погода**".

Конъюнкции соответствует следующая таблица истинности:

Высказывание	A	B	A&B
На улице не светит солнце и пасмурная погода	0	0	0
На улице не светит солнце и ясная погода	0	1	0
На улице светит солнце и пасмурная погода	1	0	0
На улице светит солнце и ясная погода	1	1	1

Вывод: результат будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны и ложным в остальных случаях.

В алгебре множеств конъюнкции соответствует операция *пересечения множеств*, т.е. множеству получившемуся в результате умножения множеств **A** и **B** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно двум множествам.



3) Логическое сложение (дизъюнкция)

Логическая связка **ДИЗЬЮНКЦИЯ** (от лат. disjunctio - различаю).

Название – **логическое сложение**.

Обозначение: в алгебре высказываний **A∨B**,

В естественном языке ему соответствует союз "**или**".

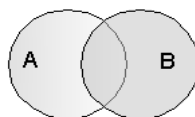
Например, из двух простых высказываний **A**="На улице светит солнце" и **B**="На улице пасмурная погода" построим сложное, используя союз-связку "**или**". Получим "На улице светит солнце или пасмурная погода".

Дизъюнкции соответствует следующая таблица истинности:

Высказывание	A	B	A∨B
На улице не светит солнце или ясная погода	0	0	0
На улице не светит солнце или пасмурная погода	0	1	1
На улице светит солнце или ясная погода	1	0	1
На улице светит солнце или пасмурная погода	1	1	1

Вывод: результат будет ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным в остальных случаях.

В алгебре множеств дизъюнкции соответствует операция *объединения множеств*, т.е. множеству получившемуся в результате сложения множеств **A** и **B** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо множеству **A**, либо множеству **B**.



4) Логическое следование (импликация)

Логическая связка **ИМПЛИКАЦИЯ** (от лат. *implicatio* – тесно связывать).

Название – **логическое следование**.

Обозначение в алгебре высказываний: **A⇒B**, где **A** – условие, **B** – следствие.

В естественном языке ему соответствует оборот "**если ... , то ...**".

Например, из двух простых высказываний $A = \text{"На улице светит солнце"}$ и $B = \text{"На улице ясная погода"}$ построим сложное, используя оборот-связку "если..., то...".

Получим "Если светит солнце, то на улице ясная погода".

Импликация соответствует следующая таблица истинности:

Высказывание	A	B	$A \Rightarrow B$
Если не светит солнце, то на улице пасмурная погода	0	0	1
Если не светит солнце, то на улице ясная погода	0	1	1
Если светит солнце, то на улице пасмурная погода	1	0	0
Если светит солнце, то на улице ясная погода	1	1	1

Вывод: результат будет ложным тогда и только тогда, когда из истинного основания (A) следует ложное следствие (B).

5) Логическое равенство (эквивалентность)

Логическая связка ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (от лат. *aequivalens* – равноценное).

Название – логическое равенство.

Обозначение в алгебре высказываний: $A \Leftrightarrow B$.

В естественном языке ему соответствует оборот "... тогда и только тогда, когда ...".

Например, из двух простых высказываний $A = \text{"На улице ясная погода"}$ и $B = \text{"На улице светит солнце"}$ построим сложное, используя оборот-связку "...тогда и только тогда, когда...". Получим "На улице ясная погода тогда и только тогда, когда светит солнце".

Эквивалентности соответствует следующая таблица истинности:

Высказывание	A	B	$A \Leftrightarrow B$
На улице пасмурная погода тогда и только тогда, когда не светит солнце	0	0	1
На улице пасмурная погода тогда и только тогда, когда светит солнце	0	1	0
На улице ясная погода тогда и только тогда, когда не светит солнце	1	0	0
На улице ясная погода тогда и только тогда, когда светит солнце	1	1	1

Вывод: результат будет истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.

3. Таблицы истинности.

Решение логических выражений принято записывать в виде **таблиц истинности** – таблиц, в которых по действиям показано, какие значения принимает логическое выражение при всех возможных наборах его переменных.

При составлении таблицы истинности для логического выражения необходимо учитывать **порядок выполнения логических операций**, а именно:

1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

6. Ответ: $F=0$, при $X=Y=Z=0$; при $X=Y=0$ и $Z=1$.

4. Законы логики.

Логические функции двух переменных.

Логической функцией называют функцию $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$, аргументы которой $X_1, X_2, \dots, X_n$ и сама функция принимают значения **0** или **1**.

Таблицу, показывающую, какие значения принимает логическая функция при всех сочетаниях значений ее аргументов, называют **таблицей истинности логической функции**. Таблица истинности логической функции n аргументов содержит 2^n строк, n столбцов значений аргументов и **1** столбец значений функции.

Логические функции могут быть заданы табличным способом или аналитически — в виде соответствующих формул.

Существуют 16 различных логических функций от двух переменных:

Аргументы		Логические функции															
A	B	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀	F ₁₁	F ₁₂	F ₁₃	F ₁₄	F ₁₅	F ₁₆
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Из таблицы истинности видно, что:

функция $F_8(X, Y)$ - дизъюнкция,

функция $F_2(X, Y)$ - конъюнкция,

функция $F_{13}(X, Y)$ - отрицание,

функция $F_{14}(X, Y)$ - импликация,

функция $F_{10}(X, Y)$ - эквиваленция.

Если логическая функция представлена с помощью базовых логических функций (дизъюнкции, конъюнкции и инверсии), то такая форма представления называется **нормальной формой**.

Из таблицы истинности видно, что

функция $F_9(X, Y) = \neg F_8(X, Y)$ - отрицание дизъюнкции,

функция $F_{15}(X, Y) = \neg F_2(X, Y)$ - отрицание конъюнкции.

Равносильные логические выражения.

Логические выражения называются **равносильными**, если их истинностные значения совпадают при любых значениях входящих в них логических переменных.

В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования логических выражений. Приведем соотношения, отражающие эти законы.

1)	$\neg 0 = 1$ $\neg 1 = 0$ $X \& 1 = X$	Правила выполнения операций над константами (свойства операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции)
----	--	--

	$X \& 0 = 0$ $X \vee 0 = X$ $X \vee 1 = 1$	
2)	$\neg(\neg A) = A$	Закон двойного отрицания Двойное отрицание исключает отрицание.
3)	$X \& Y = Y \& X$ $X \vee Y = Y \vee X$	Законы коммутативности (переместительный закон) Результат операции над высказываниями не зависит от того, в каком порядке берутся эти высказывания. В обычной алгебре: $a+b=b+a$, $a*b = b*a$.
4)	$X \& Y \& Z = (X \& Y) \& Z = X \& (Y \& Z)$ $X \vee Y \vee Z = (X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$	Законы ассоциативности (сочетательный закон) Переменные можно группировать в любом порядке, как для операции конъюнкции, так и для операции дизъюнкции. При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать. В обычной алгебре: $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$, $(a*b)*c = a*(b*c)=a*b*c$.
5)	$X \vee (Y \& Z) = (X \vee Y) \& (X \vee Z)$ $X \& (Y \vee Z) = (X \& Y) \vee (X \& Z)$	Распределительные (дистрибутивный) законы В алгебре логики допускается вынесение общего высказывания за скобки. В обычной алгебре справедлив распределительный закон только для сложения: $(a+b)*c=a*c+b*c$.
6)	$\neg(X \vee Y) = \neg X \& \neg Y$ $\neg(X \& Y) = \neg X \vee \neg Y$ $(X \Rightarrow Y) = \neg X \vee Y$ $\neg(X \Rightarrow Y) = X \& \neg Y$	Законы общей инверсии (законы де Моргана) Описывает эффект отрицания переменных, связанных операциями И и ИЛИ . Используя формулы де Моргана, можно всякую сложную формулу записать так, чтобы знак отрицания распространялся только на простые высказывания, входящие в эту формулу.
7)	$X \& X = X$ $X \vee X = X$	Законы идемпотентности Закон означает отсутствие показателей степени.

8)	$X \& \neg X = 0$	Закон противоречия Невозможно, чтобы противоречащие высказывания были одновременно истинными.
9)	$X \vee \neg X = 1$	Закон исключения третьего Из двух противоречащих высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.
10)	$X \vee (X \& Y) = X$ $X \& (X \vee Y) = X$ $X \vee (\neg X \& Y) = X \vee Y$ $\neg X \& (X \vee Y) = \neg X \& Y$	Законы поглощения
11)	$(X \& Y) \vee (X \& \neg Y) = X$ $(X \vee Y) \& (X \vee \neg Y) = X$	Законы исключения (склеивания)
12)	$(X \Leftrightarrow Y) = (Y \Leftrightarrow X)$	Закон контрапозиции (правило перевертывания)

Справедливость приведенных законов можно доказать табличным способом: выписать все наборы значений X и Y , вычислить на них значения левой и правой частей доказываемого выражения и убедиться, что результирующие столбцы совпадут.

Поскольку переменные в алгебре логики принимают только два значения, такая процедура оказывается вполне допустимой.

Таким образом, используя основные свойства операций алгебры логики, можно одну формулу заменить другой, ей равносильной.

В алгебре логики доказано, что любую логическую функцию можно выразить через комбинацию логических операций отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \& B) \vee (A \& \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$$

5. Правила преобразования логических выражений.

Логические выражения, правила составления логических выражений.

Логическая переменная — это простое высказывание, содержащее только одну мысль. Ее символическое обозначение — латинская буква (например, A , B , X , Y и т.д.). Значением логической переменной могут быть только константы **ИСТИНА (1)** и **ЛОЖЬ (0)**. На основании простых высказываний могут быть построены **составные высказывания**.

Логическая функция - составное высказывание, которое содержит несколько простых мыслей, соединенных между собой с помощью логических операций.

Ее символическое обозначение – $F(A, B, \dots)$.

Логические операции – логическое действие.

Пример.

1. Проанализируем составное высказывание "Если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог".

Обозначим буквой А высказывание: "Купить яблоки", буквой В - высказывание: "Купить абрикосы", буквой С - высказывание: "Испечь пирог".

2. Запишем высказывание в виде логического выражения, высказывание "Если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог" формализуется в виде формулы: $F = (A \vee B) \Rightarrow C$.

Пример.

Записывать в виде логического выражения следующее высказывание: «Летом Петя поедет в деревню и, если будет хорошая погода, то он пойдет на рыбалку».

1. Проанализируем составное высказывание. Оно состоит из следующих простых высказываний: «Петя поедет в деревню», «Будет хорошая погода», «Петя пойдет на рыбалку». Обозначим их через логические переменные:

A = Петя поедет в деревню;

B = Будет хорошая погода;

C = Петя пойдет на рыбалку.

2. Запишем высказывание в виде логического выражения, учитывая порядок действий. Если необходимо, расставим скобки: $F = A \& (B \Rightarrow C)$.

Правила преобразования логических выражений с помощью законов логики.

Если логическое выражение содержит большое число операций, то составлять для него таблицу истинности достаточно сложно, так как приходится перебирать большое количество вариантов. В таких случаях формулы удобно привести к **нормальной форме**.

Формула имеет нормальную форму, если в ней отсутствуют знаки эквиваленции, импликации, двойного отрицания, при этом знаки отрицания находятся только при логических переменных.

Для приведения формулы к нормальной форме используют законы логики и правила логических преобразований.

Под упрощением формулы, не содержащей операций импликации и эквиваленции, понимают равносильное преобразование, приводящее к формуле, которая либо содержит по сравнению с исходной меньшее число операций конъюнкции и дизъюнкции и не содержит отрицаний неэлементарных формул, либо содержит меньшее число вхождений переменных.

Некоторые преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т.п.), тогда как другие преобразования основаны на свойствах, которыми не обладают операции обычной алгебры (использование распределительного закона для конъюнкции, законов поглощения, склеивания, де Моргана и др.).

Пример.

Упростить логическое выражение $F = (\neg A \vee B) \& \neg(A \& B)$.

Используя закон де Моргана, получим:

$$(\neg A \vee B) \& \neg(A \& B) = (\neg A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B).$$

Применим правило дистрибутивности, т.е. вынесем общий множитель за скобки:

$$(\neg A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B) = \neg A \vee (B \& \neg B).$$

По закону противоречия во второй скобке получаем:

$$\neg A \vee (B \& \neg B) = \neg A \vee 0.$$

Применяя свойства констант, получим:

$$\neg A \vee 0 = \neg A.$$

Таким образом, $F = (\neg A \vee B) \& \neg(A \& B) = \neg A$.

Пример.

Упростить логическое выражение $F = (X \Rightarrow Y) \vee (Y \Rightarrow X)$.

Используя закон де Моргана, получим:

$$(X \Rightarrow Y) \vee (Y \Rightarrow X) = (\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee X).$$

Используя правило ассоциативности, перегруппируем слагаемые:

$$(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \vee X) = (\neg X \vee X) \vee (\neg Y \vee Y).$$

По закону исключения третьего получим:

$$(\neg X \vee X) \vee (\neg Y \vee Y) = 1 \vee 1 = 1.$$

Таким образом, $F = (X \Rightarrow Y) \vee (Y \Rightarrow X) = 1$.

Лекция 3

ТЕМА: «ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЯ»

Содержание Лекции:

1. *Понятие положительной скалярной величины.*
2. *Классификация и основные характеристики измерения величин.*
3. *Стандартные единицы величин и соотношения между ними.*
4. *Единицы измерения величин, применяемые в профессиональной деятельности.*

1. Понятие положительной скалярной величины.

Рассмотрим два высказывания, в которых используется слово «длина»:

- 1) многие окружающие нас предметы имеют длину;
- 2) стол имеет длину.

В первом предложении утверждается, что длиной обладают объекты некоторого класса. Во втором речь идет о том, что длиной обладает конкретный объект из этого класса. Обобщая, можно сказать, что термин «длина» употребляется для обозначения свойства либо класса объектов (предметы имеют длину), либо конкретного объекта из этого класса (стол имеет длину).

Но чем данное свойство отличается от других свойств объектов этого класса? Например, стол может иметь не только длину, но и быть изготовленным из дерева или металла; столы могут быть разной формы. О длине можно сказать, что разные столы обладают этим свойством в разной степени (один стол может быть длиннее или короче другого), чего не скажешь о форме — один стол не может быть «прямоугольнее» другого.

Таким образом, свойство «иметь длину» — особое свойство объектов, оно проявляется в том случае, когда объекты сравнивают по их протяженности (подлине). В процессе сравнения устанавливают, что либо два объекта имеют одну и ту же длину, либо длина одного меньше длины другого.

Аналогично можно рассматривать и другие известные величины: площадь, массу, время и т.д. Они представляют собой особые свойства окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравнении предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.

Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называются величинами одного рода или однородными величинами.

Например, длина стола и длина комнаты — это величины одного рода.

Напомним основные положения, связанные с однородными величинами.

1. Любые две величины одного рода сравнимы: они либо равны, либо одна меньше другой. Иначе, для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше», и для любых величин A и B справедливо одно и только одно из отношений: $A < B$, $A = B$, $A > B$.

Например, мы говорим, что длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше, чем длина любого катета этого треугольника, масса яблока меньше массы арбуза, а длины противоположных сторон прямоугольника равны.

2. Отношение «меньше» для однородных величин транзитивно: если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$. Так, если площадь треугольника S_1 меньше площади треугольника S_2 , и площадь треугольника S_2 меньше площади треугольника S_3 , то площадь треугольника S_1 меньше площади треугольника S_3 .

3. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода. Иными словами, для любых двух величин A и B однозначно определяется величина $C = A + B$, которую называют суммой величин A и B .

Сложение величин коммутативно и ассоциативно.

Например, если A — масса арбуза, а B — масса дыни, то $C = A + B$ — это масса арбуза и дыни. Очевидно, что $A + B = B + A$.

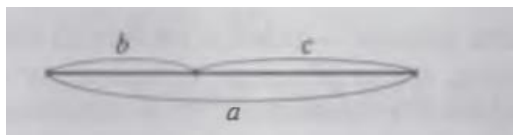
Нетрудно показать, что $(A + B) + C = A + (B + C)$.

4. Величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение.

Разностью величин A и B называется такая величина $C = A - B$, что $A = B + C$.

Разность величин A и B существует тогда и только тогда, когда $A > B$.

Например, если A — длина отрезка a , B — длина отрезка b , то $C = A - B$ — это длина отрезка c .



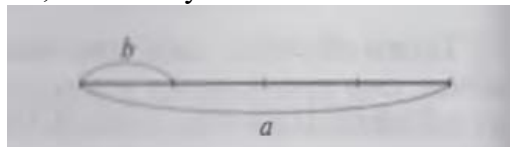
5. Величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода. Более точно, для любой величины A и любого положительного действительного числа x существует единственная величина $B = x \cdot A$, которую называют произведением величины A на число x .

Например, если A — время, отводимое на один урок, то умножив A на число $x = 3$, получим величину $B = 3 \cdot A$ — время, за которое пройдет 3 урока.

6. Величины одного рода можно делить, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число.

Частным величин A и B называется такое положительное действительное число $x = A:B$, что $A = x \cdot B$.

Так, если A — длина отрезка a , B — длина отрезка b и отрезок A состоит из четырех отрезков, равных b , то $A:B = 4$, поскольку $A = 4 \cdot B$.



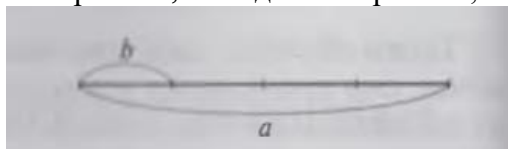
Величины, как свойства объектов, обладают еще одной особенностью — их можно оценивать количественно. Для этого величину надо измерить. Чтобы осуществить измерение из данного рода величин выбирают величину, которую называют единицей измерения. Будем обозначать ее буквой E .

Если задана величина A и выбрана единица величины E (того же рода), то измерить величину A — это значит найти такое положительное действительное число x , что $A = x \cdot E$.

Число x называется **численным значением величины A при единице величины E** . Оно показывает, во сколько раз величина A больше (или меньше) величины E , принятой за единицу измерения.

Если $A = x \cdot E$, то число x называют также **мерой величины A при единице E** и пишут $x = m_E(A)$.

Например, если A — длина отрезка a , E — длина отрезка b , то $A = 4 \cdot E$.



Число 4 — это численное значение длины A при единице длины E , или, другими словами, число 4 — это мера длины A при единице длины E .

В практической деятельности при измерении величин люди пользуются стандартными единицами величин: так, длину измеряют в метрах, сантиметрах и т.д. Результат измерения записывают в таком виде: 2,7 кг; 13 см; 16 с. Исходя из понятия измерения, данного выше, эти записи можно рассматривать как произведение числа и единицы величины. Например, 2,7 кг = 2,7 · кг; 13 см = 13 · см; 16 с = 16 · с.

Используя это представление, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой. Пусть, например, требуется выразить $\frac{5}{12}$ ч в минутах. Так как $\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12}$ ·

ч и 1 ч = 60 мин, то $\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12}$ · 60 мин = 25 мин.

Величина, которая определяется одним численным значением, называется **скалярной величиной**.

Если при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют **положительной скалярной величиной**.

Положительными скалярными величинами являются следующие: длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Понятие положительной скалярной величины можно определить аксиоматически. Пусть V — множество, на котором заданы отношение «меньше» ($<$) и операция сложения (+). Тогда V есть система однородных положительных скалярных величин, если выполняются следующие аксиомы:

1. Каковы бы ни были величины A и B , имеет место одно и только одно из трех соотношений: или $A = B$, или $A < B$, или $B < A$.
2. Для любых величин A , B и C из V выполняется утверждение: если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$ (транзитивность отношения «меньше»).
3. Для любых двух величин A и B существует однозначно определенная величина $C = A + B$.
4. Для любых двух величин A и B выполняется равенство: $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).
5. Для любых трех величин A , B и C выполняется равенство: $(A+B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения).
6. Для любых двух величин A и B выполняется утверждение: $A < A + B$ (монотонность сложения).
7. Если $B < A$, то существует одна и только одна величина C , для которой $B + C = A$ (возможность вычитания).
8. Каковы бы ни были величина A и натуральное число n , существует такая величина B , что $n \cdot B = A$ (возможность деления).
9. Каковы бы ни были величины A и B , существует такое натуральное число n , что $A < n \cdot B$ (аксиома Архимеда или Евдокса).
10. Если последовательности величин $A_1 < A_2 < \dots < A_n < \dots < B_n < \dots < B_2 < B_1$ обладают тем свойством, что $B_n - A_n < C$ для любой величины C при достаточно большом номере n , то существует единственная величина X , которая больше всех A и меньше всех B (аксиома непрерывности).

Если в так определенной системе $(V, <, +)$ принять какую-либо величину E за единицу измерения, то все остальные величины системы однозначно представляются в виде $A = x \cdot E$, где x — положительное действительное число.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

1. Если величины A и B измерены с помощью единицы величины E , то отношения между величинами A и B будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$$A = B \Leftrightarrow m(A) = m(B); A < B \Leftrightarrow m(A) < m(B); A > B \Leftrightarrow m(A) > m(B).$$

Например, если массы двух тел таковы, что $A = 5$ кг, $B = 3$ кг, то можно утверждать, что $A > B$, поскольку $5 > 3$.

2. Если величины A и B измерены с помощью единицы величины E , то чтобы найти численное значение суммы $A + B$, достаточно сложить численные значения величин A и B :

$$A + B \Leftrightarrow m(A + B) = m(A) + m(B).$$

Например, если $A = 5$ кг, $B = 3$ кг, то $A + B = 5 \text{ кг} + 3 \text{ кг} = (5 + 3) \text{ кг} = 8 \text{ кг}$.

3. Если величины A и B таковы, что $B = x \cdot A$, где x — положительное действительное число, и величина A измерена с помощью единицы величины E , то, чтобы найти численное значение величины B при единице E , достаточно число x умножить на число $m(A)$:

$$B = x \cdot A \Leftrightarrow m(B) = x \cdot m(A).$$

Например, если масса B в 3 раза больше массы A и $A = 2$ кг, то $B = 3 \cdot A = 3 \cdot (2 \cdot \text{кг}) = (3 \cdot 2) \cdot \text{кг} = 6 \text{ кг}$.

В математике при записи произведения величины A и числа x принято число писать перед величиной, т.е. $x \cdot A$. Но разрешается писать и так: $A \cdot x$. Тогда численное значение величины A умножают на x , если находят значение величины $A \cdot x$.

Рассмотренные понятия — объект (предмет, явление, процесс), его величина, численное значение величины, единица величины — надо уметь вычленять в текстах и задачах. Например, математическое содержание предложения «Купили 3 килограмма яблок» можно описать следующим образом: в предложении рассматривается такой объект, как яблоки, и его свойство — масса; для измерения массы использовали единицу массы — килограмм; в результате измерения получили число 3 — численное значение массы яблок при единице массы килограмм.

Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Например, для человека — это рост, масса, возраст и др. Процесс равномерного движения характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем, между которыми существует зависимость, выражаемая формулой $s = vt$.

Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют **величинами разного рода**, или **разнородными величинами**. Так, например, длина и масса — это разнородные величины.

2. Классификация и основные характеристики измерения величин.

Измерение — это организованное действие человека, выполняемое для количественного познания свойств физического объекта с помощью определения опытным путем значения какой-либо физической величины.

Существует несколько видов измерений. При их классификации обычно исходят из характера зависимости измеряемой величины от времени, вида уравнения измерений, условий, определяющих точность результата измерений и способов выражения этих результатов.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени измерения разделяются на:

- *статические*, при которых измеряемая величина остается постоянной во времени;
- *динамические*, в процессе которых измеряемая величина изменяется и является непостоянной во времени.

Статическими измерениями являются, например, измерения размеров тела, постоянного давления, динамическими — измерения пульсирующих давлений, вибраций.

По способу получения результатов измерений их разделяют на

- прямые;
- косвенные;
- совокупные;
- совместные.

Прямые — это измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опытных данных. Прямые измерения можно выразить формулой $Q = X$, где Q — искомое значение измеряемой величины, а X — значение, непосредственно получаемое из опытных данных.

При прямых измерениях экспериментальным операциям подвергают измеряемую величину, которую сравнивают с мерой непосредственно или же с помощью измерительных приборов, градуированных в требуемых единицах. Примерами прямых служат измерения длины тела линейкой, массы при помощи весов и др.

Косвенные — это измерения, при которых искомую величину определяют на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям, т.е. измеряют не собственно определяемую величину, а другие, функционально с ней связанные.

Косвенные измерения широко распространены в тех случаях, когда искомую величину невозможно или слишком сложно измерить непосредственно или когда прямое измерение дает менее точный результат. Роль их особенно велика при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению, например размеров астрономического или внутриатомного порядка.

Совокупные - это производимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомую определяют решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин.

Примером совокупных измерений является определение массы отдельных гирь набора (калибровка по известной массе одной из них и по результатам прямых сравнений масс различных сочетаний гирь).

Совместные - это производимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для нахождения зависимостей между ними.

По условиям, определяющим точность результата, измерения делятся на три класса:

1. *Измерения максимально возможной точности*, достижимой при существующем уровне техники.

К ним относятся в первую очередь эталонные измерения, связанные с максимально возможной точностью воспроизведения установленных единиц физических величин, и, кроме того, измерения физических констант, прежде всего универсальных (например абсолютного значения ускорения свободного падения, гиромагнитного отношения протона и др.).

К этому же классу относятся и некоторые специальные измерения, требующие высокой точности.

2. *Контрольно-поверочные измерения*, погрешность которых с определенной вероятностью не должна превышать некоторого заданного значения.

К ним относятся измерения, выполняемые лабораториями государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники и заводскими измерительными лабораториями, которые гарантируют погрешность результата с определенной вероятностью, не превышающей некоторого, заранее заданного значения.

3. *Технические измерения*, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений.

По способу выражения результатов измерений различают *абсолютные* и *относительные* измерения.

Абсолютными называются измерения, которые основаны на прямых измерениях одной или нескольких основных величин или на использовании значений физических констант.

Относительными называются измерения отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или измерения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную.

Основными характеристиками измерений являются: *принцип измерений, метод измерений, погрешность, точность, правильность и достоверность, сходимость измерений, воспроизводимость измерений.*

Принцип измерений - физическое явление или совокупность физических явлений, положенных в основу измерений. Например, измерение массы тела при помощи взвешивания с использованием силы тяжести, пропорциональной массе, измерение температуры с использованием термоэлектрического эффекта.

Метод измерений - совокупность приемов использования принципов и средств измерений. Средствами измерений являются используемые технические средства, имеющие нормированные метрологические свойства.

Погрешность измерений - разность между полученным при измерении X' и истинным Q значениями измеряемой величины:

$$\Delta = X' - Q$$

Погрешность вызывается несовершенством методов и средств измерений, непостоянством условий наблюдения, а также недостаточным опытом наблюдателя или особенностями его органов чувств.

Точность измерений - это характеристика измерений, отражающая близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Количественно точность можно выразить величиной, обратной модулю относительной погрешности:

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta}{Q} \right|^{-1}.$$

Например, если погрешность измерений равна $10^{-2}\% = 10^{-4}$, то точность равна 10^4 .

Правильность измерения определяется как качество измерения, отражающее близость к нулю систематических погрешностей результатов (т.е. таких погрешностей, которые остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины). Правильность измерений зависит, в частности, от того, насколько действительный размер единицы, в которой выполнено измерение, отличается от ее истинного размера (по определению), т.е. от того, в какой степени были правильны (верны) средства измерений, использованные для данного вида измерений.

Важнейшей характеристикой качества измерений является их *достоверность*; она характеризует доверие к результатам измерений и делит их на две категории: *достоверные* и *недостоверные*, в зависимости от того, известны или неизвестны вероятностные характеристики их отклонений от истинных значений соответствующих величин. Результаты измерений, достоверность которых неизвестна, не представляют ценности и в ряде случаев могут служить источником дезинформации.

Наличие погрешности ограничивает достоверность измерений, т.е. вносит ограничение в число достоверных значащих цифр числового значения измеряемой величины и определяет точность измерений.

Сходимость измерений — качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в одинаковых условиях.

Воспроизводимость измерений — качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, выполненных в различных условиях (в разное время, в различных местах).

3. Стандартные единицы величин и соотношения между ними.

Стандартные единицы величин и соотношения между ними существуют в разных системах единиц, например, в Международной системе единиц (СИ) и технической системе единиц (МКСС).

В Международной системе единиц (СИ)

Основные единицы:

- метр (м) — единица длины;

- килограмм (кг) — единица массы;
- секунда (с) — единица времени;
- ампер (А) — единица электрического тока;
- кельвин (К) — единица термодинамической температуры;
- моль (моль) — единица количества вещества;
- кандела (кд) — единица силы света.

Производные единицы получаются путём математических выражений из базовых единиц. Например:

- единица силы — ньютон (Н), $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \times \text{м} / \text{с}^2$;
- единица энергии — джоуль (Дж), $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \times \text{м}$;
- единица давления — паскаль (Па), $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} / \text{м}^2$.

Десятичные приставки используются для образования кратных и дольных единиц, служат для сокращения количества нулей в значениях величин. Например, приставка «кило» означает умножение на 1000 (километр = 1000 метров).

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)					
величина	наименование единицы	обозначение	величина	наименование единицы	обозначение
ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ			ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ		
ДЛИНА	метр	м	ЧАСТОТА	герц	Гц
МАССА	килограмм	кг	СКОРОСТЬ	метр в секунду	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$
ВРЕМЯ	секунда	с	УСКОРЕНИЕ	метр на секунду в квадрате	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
СИЛА ТОКА	ампер	А	ПЛОТНОСТЬ	килограмм на кубический метр	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
СИЛА СВЕТА	кандела	кд	СИЛА	ньютон	Н $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРА	кельвин	К	ИМПУЛЬС	килограмм — метр в секунду	$\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$
КОЛИЧЕСТВО ВЕЩЕСТВА	моль	моль	ДАВЛЕНИЕ	паскаль	Па $1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$
ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ			РАБОТА, ЭНЕРГИЯ	джоуль	Дж $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД	кулон	Кл $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$	МОЩНОСТЬ	ватт	Вт $1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ, ЭДС	вольт	В $1 \text{ В} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$	МАГНИТНЫЙ ПОТОК	вебер	Вб $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$
НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ	вольт на метр	$\frac{\text{В}}{\text{м}}$	ИНДУКТИВНОСТЬ	генри	Гн $1 \text{ Гн} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{А}}$
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	ом	Ом $1 \text{ Ом} = 1 \frac{\text{В}}{\text{А}}$	МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ	тесла	Тл $1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$
ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ	фарад	Ф $1 \text{ Ф} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$			

В технической системе единиц (МКСС)

Основные единицы — метр, килограмм-сила (кгс) и секунда.

Соотношения между единицами:

- $1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н}$;
- $1 \text{ кгс/м}^2 = 9,81 \text{ Н/м}^2$.

в МКСС принято «стандартное ускорение свободного падения» — $9,80665 \text{ м/с}^2$, поэтому величины кгс и тс фиксированы, но реальные силы, действующие в различных частях

поверхности Земли, могут несколько отличаться.

4. Единицы измерения величин, применяемые в профессиональной деятельности.

В физической культуре и спорте используют как единицы измерения, входящие в **Международную систему единиц (СИ)**, так и **внесистемные единицы**.

Единицы СИ включают основные и производные. **Основные** единицы отражают наиболее общие свойства материи (протяжённость, время и т. п.). **Производные** единицы выражаются через основные путём арифметических действий. Некоторые единицы, которые применяются в спортивных измерениях:

- **Основные:** длина — метр (м), сантиметр (см), миллиметр (мм), масса — килограмм (кг), грамм (г), миллиграмм (мг), время, период — секунда (с), минута (мин), час (ч), сила электрического тока — ампер (А), температура — Кельвин (К), градус Цельсия (°С).
- **Производные:** сила — ньютон ($1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \times \text{м/с}^2$), скорость — метр в секунду (м/с), объём — литр (л), угол поворота — градус угловой (... °), радиан (рад), темп (частота) — движений в секунду (с⁻¹), ускорение — метр на секунду в квадрате (м/с²), момент инерции — килограмм-метр в квадрате (кг×м²), момент силы — ньютон-метр (Н×м), импульс силы — ньютон-секунда (Н×с), мощность — ватт (Вт).

Некоторые внесистемные единицы, которые часто используются в физической культуре и спорте: единица времени — минута (1 мин = 60 с), плоского угла — градус, объёма — литр, силы — килограмм-сила (1 кГ = 9,81 Н), работы — килограммометр (1 кГ · м = 9,81 Дж), количества теплоты — калория (1 кал = 4,18 Дж), мощности — лошадиная сила (1 л. с. = 736 Вт), давления — миллиметр ртутного столба (1 мм рт. ст. = 121,1 Н/м²).

Лекция 4

ТЕМА: «ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»

Содержание Лекции:

- 1. Точные и приближенные значения величин.**
- 2. Точность приближенных значений величин.**
- 3. Абсолютная и относительная погрешности.**
- 4. Округление приближенных значений величин.**
- 5. Правила нахождения процентного соотношения.**
- 6. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью.**
- 7. Графическое представление результатов измерения величин.**

1. Точные и приближенные значения величин.

Числа, встречающиеся на практике, бывают двух родов. Одни дают истинное значение величины, другие – только приблизительное. Первые называют **точными**, вторые – **приближёнными**.

Можно ли измерять длину рейки точно ? Нет. Даже если услышите, что длина какой-то рейки равняется, например, 9,42783 м, не верьте этому. Ведь длину такой рейки с точностью до сотой миллиметра нельзя измерять. Результат каждого измерения – приближенное значение величины.

Чаще всего удобно пользоваться приближёнными числами вместо точного, тем более, что во многих случаях точное число вообще найти невозможно. Числа, которые мы называем приближёнными, иначе говоря, верными только приблизительно, но не совершенно точно, постоянно встречаются нам в жизни на практике.

Приближённые числа могут получаться прежде всего при счёте предметов, если этих предметов слишком много и их почему – либо трудно или даже нельзя подсчитать точно. Конечно, в результате счёта предметов могут получаться и точные числа, если предметов не слишком много, если их число не слишком быстро меняется и если их без затруднений можно подсчитывать.

Пример: Если в классе есть 29 учеников, то число 29 – точное. Если же говорят, что расстояние от Москвы до Киева равно 960 км, то здесь число 960 – приближённое, так как с одной стороны, наши измерительные инструменты не абсолютно точны, с другой стороны, сами города имеют некоторую протяжённость.

Теория приближённых вычислений позволяет:

- зная степень точности данных, оценить степень точности результатов;
- брать данные с надлежащей степенью точности, достаточной для обеспечения требуемой точности результата;
- рационализировать процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияние на точность результата.

Итак, в разных случаях и в разных обстоятельствах счёт предметов может приводить и к точному и к приближённому числу. Но часто число получается в результате измерения какой-нибудь величины, например, длины, площади, объёма, веса. Такое число (его называют значением величины) всегда бывает приближённым. Измерение всегда приводит не к точному, а к приближённому числу с той или другой степенью точности.

2. Точность приближенных значений величин.

Всякое измерение (длины, веса и т. д.) выполняется только приблизительно. Иногда, даже в тех случаях, когда можно установить истинное значение величины, бывает достаточно знать лишь её приближённое значение. Между истинной величиной предмета и числом, полученным при измерении (или подсчёте), бывает некоторая, хотя бы и небольшая разница. Приближённые значения обычно записывают так, чтобы по записи можно было судить о точности приближения.

Пример: На рулоне обоев написано, что его длина равна $18 \pm 0,3$ м.

Эта запись означает, что длина рулона равна 18 м с точностью до 0,3 м, т. е. точное значение длины может отличаться от приближённого значения, равного 18 м, не более чем на 0,4 м.

Другими словами длина рулона должна находиться между

$$18 - 0,3 = 17,7 \text{ и } 18 + 0,3 = 18,3.$$

Пример: Если измеряя длину x некоторой рейки, выявили, что она больше от 6,427 м и меньше от 6,429 м, то записывают:

$$x = 6,428 \pm 0,001 \text{ м.}$$

Говорят, что значение длины рейки найдено с точностью до 0,001 м (одного миллиметра).

Через то, что мы не можем выполнить бесконечного процесса деления, то мы должны прекратить деление на каком-либо десятичном знаке, то есть выполнить приближенное деление. Мы можем, например, прекратить деление на первом десятичном знаке, то есть ограничиться десятными частями; в случае потребности мы можем остановиться на втором десятичном знаке, достав сотые части, и т. д. В таких случаях говорят о приближенном превращении обычных дробей в десятку. В этих случаях говорят, что мы округляем бесконечную десятичную дробь. Округление делается с той точностью, которая нужна для решения данной задачи.

3. Абсолютная и относительная погрешности.

1. Если x - точное значение числа, a – приближённое значение, то $x \approx a$.

Определение. Разность $x - a$ между точным и приближённым значением числа называется **погрешностью приближения**.

Определение. **Абсолютной погрешностью** приближенного значения числа называется модуль разности между точным и приближенным значением: $\Delta x = |x - a|$.

Часто точное значение величины является неизвестным, следовательно, неизвестным является и точное значение абсолютной погрешности. Поэтому для оценки точности приближения вводится понятие границы абсолютной погрешности.

Определение. **Границей абсолютной погрешности** приближения $x \approx a$ называется такое положительное число h , больше которого абсолютная погрешность быть не может:

$$\Delta x = |x - a| \leq h.$$

В этом случае говорят, что величина x приближенно с точностью до h равна a и пишут $x \approx a$ с точностью до h или $x = a \pm h$. Таким образом, истинное значение величины x заключено между границами $a - h$ и $a + h$, т.е. $a - h \leq x \leq a + h$.

Граница абсолютной погрешности не определяется однозначно, поэтому в качестве границы абсолютной погрешности берут наименьшее число, которое удобно для вычислений и обеспечивает необходимую точность.

Цифра в записи приближенного числа называется верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы того разряда, в котором записана эта цифра. В противном случае она называется сомнительной.

Абсолютная погрешность приближения не характеризует качество измерений.

Действительно, если мы измеряем с точностью до 1 см какую-либо длину, то в том случае, когда речь идет об определении длины карандаша, это будет плохая точность. Если же с точностью до 1 см определить длину или ширину волейбольной площадки, то это будет высокая точность.

Для характеристики качества измерения вводится понятие относительной погрешности.

Определение. **Относительной погрешностью** приближенного значения числа называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения числа $\frac{\Delta x}{|a|} = \frac{|x - a|}{|a|}$.

Относительную погрешность часто обозначают ε и выражают в процентах $\varepsilon = \frac{|x - a|}{|a|} \cdot 100\%$.

Границу относительной погрешности обозначают δ , т.е. $\varepsilon = \frac{\Delta x}{|a|} \leq \frac{h}{|a|} = \delta$.

4. Округление приближенных значений величин.

Чтобы приближенно найти сумму, разность, произведение, частное двух бесконечных десятичных дробей, нужно проделать соответствующие действия над их n -ми отрезками.

На практике результаты измерений и вычислений обычно выражаются в виде конечных десятичных дробей. Если в десятичной дроби, равной точному или приближенному значению некоторой величины, десятичных знаков больше, чем это необходимо по практическим соображениям, то эту дробь округляют. Операция округления состоит в отбрасывании единиц младших разрядов начиная с некоторого. Полученное число принимается за приближенное значение этой дроби.

Существуют *три способа округления* положительных десятичных дробей: округление с недостатком, округление с избытком, округление с наименьшей ошибкой.

Округление с недостатком до единиц некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов. Все цифры дроби до данного разряда включительно не меняются, а цифры младших разрядов заменяются нулями.

Округление с избытком до единиц некоторого разряда отличается от округления с недостатком тем, что число единиц данного разряда увеличивается на единицу.

Округление с наименьшей погрешностью производится по следующим правилам:

- 1) единицы всех младших разрядов отбрасываются;
- 2) число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Определение. Значащими цифрами десятичной дроби называют все её цифры, кроме нулей, расположенных левее первой, отличной от нуля цифры.

Определение. Значащими цифрами целого числа называют все его цифры, кроме нулей, расположенных в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр.

0,712 – 3 значащие цифры; 45,03 – 4 значащие цифры; 0,0016 – 2 значащие цифры.

1. При сложении и вычитании приближенных значений ответ необходимо округлить, оставив после запятой столько цифр, сколько их в менее точном числе.

Пример. Сложить приближенные числа: 2,369; 17,24; 8,653; 94,124.

Предварительно округлим данные числа до сотых и сложим их:

$$2,37 + 17,24 + 8,65 + 94,12 \approx 122,38.$$

2. При умножении и делении приближенных значений ответ необходимо округлить, оставив в нем столько значащих цифр, сколько их в менее точном числе.

Пример. $23,41 \cdot 0,0324 \approx 0,758484 \approx 0,758$.

3. При вычислении значения выражения в несколько действий, в промежуточных результатах надо оставить на одну цифру больше, чем указано в правилах. В конечном действии последнюю цифру надо округлить.

Правила подсчёта цифр:

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их в наименее точном числе.

2. При умножении и делении приближённых чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

3. При возведении в степень в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

4. При извлечении корня сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.

5. При выполнении промежуточных действий оставляют на один знак больше, чем требуют правила, а в результате запасной знак округляют.

5. Правила нахождения процентного соотношения.

Процент — одна сотая часть величины или числа. Обозначается символом %:

$$1\% = 0,01 = \frac{1}{100}.$$

1. **Чтобы найти процент от числа**, нужно само число разделить на 100 и умножить на количество процентов.

2. **Чтобы найти число по его процентам**, нужно число разделить на количество процентов и умножить на 100.

3. **Чтобы определить процентное соотношение двух величин**, нужно одно число разделить на другое и умножить на 100%.

4. **Чтобы найти один процент от числа**, нужно само число разделить на 100.

5. **Чтобы получить нужное количество процентов**, можно найти размер 10%, а потом разделить или умножить его.

Для преобразования десятичной дроби в проценты, ее необходимо умножить на 100.

Например: $4 = 400\%$; $0,4 = 40\%$; $0,04 = 4\%$; $0,004 = 0.4\%$.

Для преобразования процентов в десятичную дробь необходимо число процентов разделить на 100.

Например: $500\% = 5$; $50\% = 0,5$; $5\% = 0,05$; $0,5\% = 0,005$.

Пример. Из 40 спортсменов клуба 12 — кандидаты в мастера спорта, какой процент составляют кандидаты?

Решение:

40 спортсменов — 100%,

12 спортсменов — X%.

Составим пропорцию: $40 \times X = 12 \times 100$.

$$X = 12 \times 100 / 40 = 30\%.$$

Ответ: 30% спортсменов клуба — кандидаты в мастера спорта.

6. Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью.

Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью (оценка погрешности) — это процесс, направленный на определение отклонения результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Допустимая погрешность (норма погрешности) зависит от формулировки задачи измерений и может быть указана в нормативных документах или в паспортах на приборы. Анализ результатов позволяет:

- оценить достоверность измерений, получить количественные характеристики надёжности данных;
- выявить объективные закономерности при сравнении различных групп результатов измерений, отделить измеряемую величину от влияния внешних неконтролируемых факторов.

Виды погрешностей

Погрешности измерений классифицируют по разным признакам, например:

- **По способу выражения** — абсолютная, относительная и приведённая погрешности.

Абсолютная погрешность

Абсолютной погрешностью называют величину, выраженную в единицах измеряемой величины. Её можно описать формулой $\Delta X = X_{\text{измеряемый}} - X_{\text{истинный}}$. Вместо истинного значения измеряемой величины на практике пользуются действительным значением X_d , которое достаточно близко к истинному и которое определяется экспериментальным путём и может приниматься вместо истинного. Из-за того, что истинное значение величины всегда неизвестно, можно лишь оценить границы, в которых лежит погрешность, с некоторой вероятностью. Такая оценка выполняется методами математической статистики.

Относительная погрешность.

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X_d}.$$

Относительная погрешность выражается отношением δX . Относительная погрешность является безразмерной величиной; её численное значение может указываться, например, в процентах.

- **По источнику возникновения** — инструментальные, методические, внешние и субъективные погрешности.

Инструментальная погрешность — это погрешность, которая определяется несовершенством прибора, возникающим, например, из-за неточной калибровки.

Методическая погрешность обусловлена несовершенством метода измерений. К таким можно отнести погрешности от неадекватности принятой модели объекта или от неточности расчётных формул.

Субъективная погрешность — погрешность, обусловленная ограниченными возможностями, ошибками человека при проведении измерений: проявляется, например, в неточностях при отсчёте показаний со шкалы прибора.

- **По характеру проявления** — систематические, случайные и грубые (промахи).

Систематическая погрешность — это погрешность, изменяющаяся по определённому закону (в частности, постоянная погрешность, не изменяющаяся от измерения к измерению). Систематические погрешности могут быть связаны с неисправностью или несовершенством приборов (неправильная шкала, калибровка и т. п.), неучтёнными экспериментатором.

Систематическую ошибку нельзя устранить повторными измерениями. Её устраняют либо с помощью поправок, либо «улучшением» эксперимента.

Случайная погрешность — это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом в серии повторных измерений одной и той же величины, проведённых в одних и тех же условиях. В появлении таких погрешностей не наблюдается какой-либо закономерности, они обнаруживаются при повторных измерениях одной и той же величины в виде некоторого разброса получаемых результатов. Случайные погрешности неизбежны, всегда присутствуют в результате измерения, однако их влияние обычно можно устранить статистической обработкой. Описание случайных погрешностей возможно только на основе теории случайных процессов и математической статистики.

Основным свойством случайной погрешности является то, что искажения искомой величины можно уменьшить путём усреднения данных.

Грубая погрешность — погрешность, существенно превышающую ожидаемую, «промах». Как правило она проявляется в результате явной ошибки в проведении измерений, просчёта или неправильного чтения показаний прибора, что обнаруживается при повторных проверках. Результат измерения с грубой погрешностью исключают из рассмотрения и не используют при дальнейшей математической обработке.

Методы оценки.

Для оценки погрешностей используют, например:

- **Статистическую обработку результатов** — использование методов математической статистики (например, вычисление стандартного отклонения) позволяет оценить величину случайных погрешностей и определить доверительный интервал для результатов измерений.

- **Выявление систематических погрешностей** — регулярная проверка приборов по эталонам позволяет выявить и скорректировать систематические погрешности.

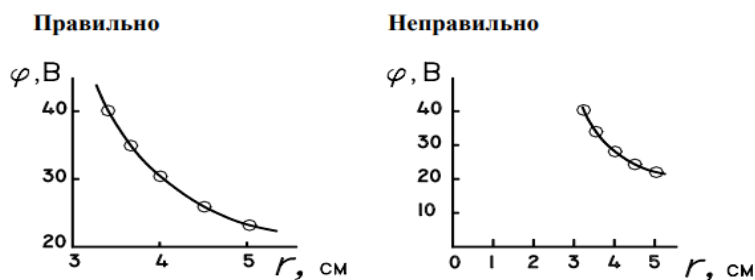
- **Измерение известной величины** — если есть эталонный образец с точно известным значением, измерение этого образца позволяет оценить систематическую погрешность прибора.
- **Использование различных методов измерений** — измерение одной и той же величины разными способами может выявить систематические расхождения.

7. Графическое представление результатов измерения величин.

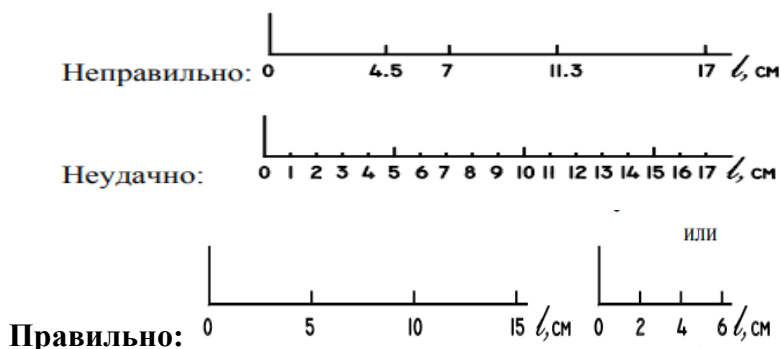
Графическое представление результатов измерений используют, когда нужно исследовать функциональную зависимость одной физической величины от другой (или нескольких).

Некоторые правила построения графиков:

1. **Выбор координатных осей.** По оси абсцисс откладывают ту величину, изменения которой являются причиной изменения другой (то есть по оси абсцисс — аргумент, по оси ординат — функцию).
2. **Масштабы и начала отсчёта** по координатным осям выбираются так, чтобы график занимал большую часть поля чертежа. При этом на пересечении осей не обязательно должны находиться нулевые значения величин.

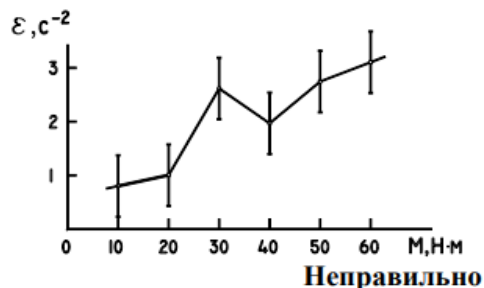
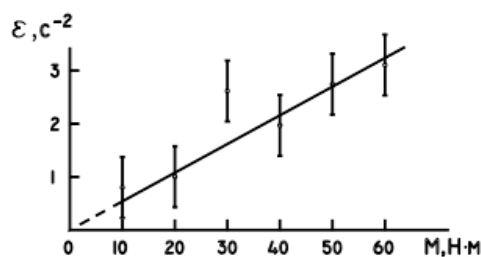


3. В конце координатных осей обязательно указываются обозначения откладываемых величин и, через запятую, их единицы измерения.



4. **Экспериментальные точки** наносятся на графике отчетливо, используя одну из форм обозначения: $\square$ $\circ$ $\triangle$ $\bullet$ $\otimes$

5. **Экспериментальная кривая** проводится плавно, чтобы экспериментальные точки по возможности близко и равномерно располагались с разных сторон кривой.

Правильно:

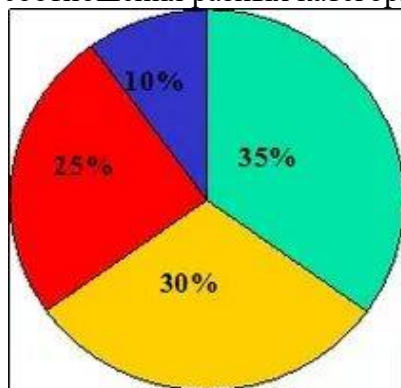
6. При изображении нескольких кривых на одном поле графика каждая из них нумеруется или выделяется каким-то другим способом. В свободной части поля даются соответствующие пояснения.

7. Готовый график снабжают заголовком, который должен содержать точное описание того, что показывает график.

Основное достоинство графиков — их наглядность. Посмотрев на график, можно получить качественное представление о полученной зависимости и отметить наличие различных особенностей: максимумов, минимумов, точек перегиба, областей наибольшей и наименьшей скорости изменения, периодичности и т. п.

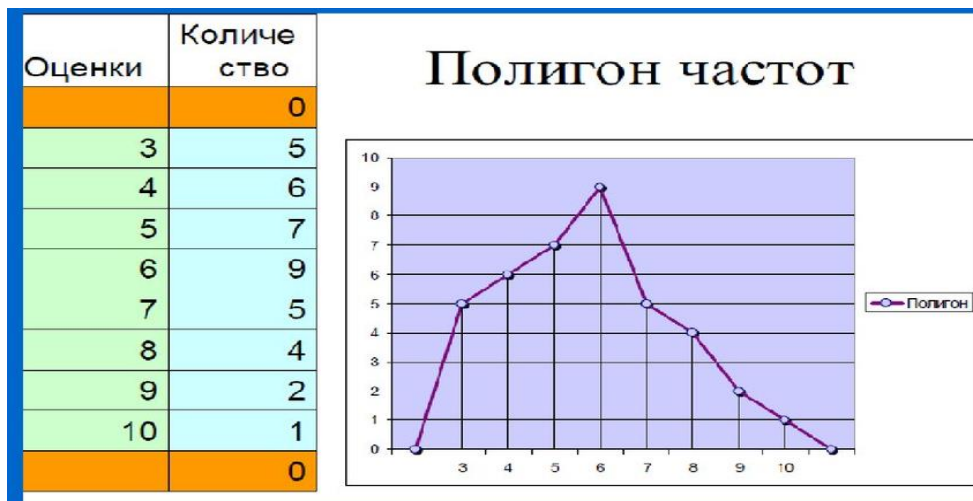
Некоторые типы графиков:

- **Круговые графики (диаграммы).** Данные представлены в виде круга, разделённого на секторы, размер которых соответствует значению переменной. Используются для демонстрации распределения данных, например, доли рынка, занимаемой компанией, или процентного соотношения разных категорий.



■	Ha "5" - 7
■	Ha "4" - 6
■	Ha "3" - 5
■	Ha "2" - 2

- **Полигон** используется при изображении дискретных вариационных рядов. Для его построения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс в одинаковом масштабе откладываются ранжированные значения варьирующего признака, а по оси ординат наносится шкала для выражения численности каждого варианта, т.е. величины частот. Полученные на пересечении абсцисс и ординат точки соединяются прямыми линиями, в результате чего получают ломаную линию, называемую полигоном частот. Иногда для замыкания полигона предлагается крайние точки (слева и справа на ломаной линии) соединить с точками на оси абсцисс, в результате чего получается многоугольник.

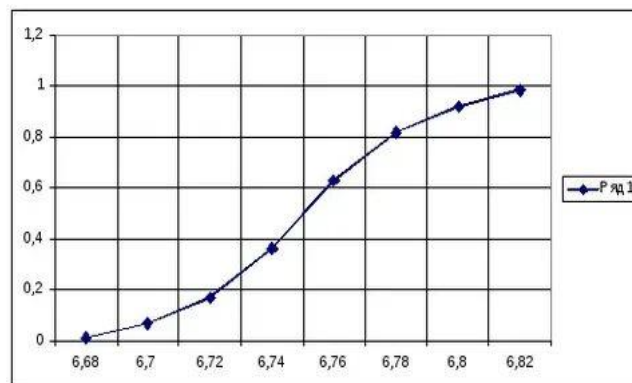


- Гистограмма** применяется для изображения интервального вариационного ряда. При построении гистограммы на оси абсцисс откладываются величины интервалов, а частоты изображаются прямоугольниками, построенными на соответствующих интервалах. Высота столбиков должна быть пропорциональна частотам. В результате мы получим график, на котором ряд распределения изображен в виде столбиковой диаграммы.

Гистограмма может быть преобразована в полигон распределения, если середины верхних сторон прямоугольников соединить прямыми.



- Кумулятивная кривая.** При помощи кумуляты изображается ряд накопленных частот. При построении кумуляты интервального вариационного ряда по оси абсцисс откладываются варианты ряда, а по оси ординат — накопленные частоты — соединяют прямыми и получают ломаную линию, т.е. кумуляту.



Лекция 5

ТЕМА: «КОМБИНАТОРИКА»

Содержание Лекции:

1. Основные комбинаторные конфигурации.
2. Формулы комбинаторики.
3. Правила комбинаторики.
4. Типы комбинаторных задач.

1. Основные комбинаторные конфигурации.

Комбинаторика – раздел математики, изучающий различные комбинации элементов, обладающие определёнными свойствами.

Основной вопрос комбинаторики - сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

В отличие от множеств комбинации элементов могут содержать одинаковые (повторные) элементы.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называется **n -факториалом** и обозначается **$n!$**

Таким образом: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Считается, что $0! = 1$

Факториал отрицательного числа не существует.

Основное свойство факториала: $n! = (n - 1)! \cdot n$

Комбинаторная конфигурация - это расположение конечного множества элементов, удовлетворяющее ряду специальных свойств. К основным комбинаторным конфигурациям относятся *сочетания*, *размещения* и *перестановки*. Ряд других конфигураций может быть сведен к ним.

Набор (множество или кортеж) элементов $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, составленный из элементов множества $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется **выборкой объема m из n элементов**, или **(n, m) -выборкой**. Выборки, различающиеся составом элементов, всегда считаются различными. Выборка называется **упорядоченной**, если порядок элементов в ней задан (т.е. она представляет из себя кортеж). Две упорядоченные выборки, различающиеся только порядком следования элементов, считаются различными. Если порядок элементов в выборке несуществен, то выборка называется **неупорядоченной**.

Упорядоченная (n, m) -выборка, в которой элементы могут повторяться, называется **(n, m) -размещением с повторениями**, или **размещением с повторениями из n элементов по m** . Если элементы (n, m) -выборки попарно различны, то она называется **(n, m) -размещением без повторений**, или **размещением без повторений из n элементов по m** .

(n, n) -размещения без повторений называются **n -перестановками**, или **перестановками из n элементов**.

Неупорядоченные (n, m) -выборки называются **сочетаниями: с повторениями или без повторений**. Заметим, что **(n, m) -сочетание без повторений** - это m -элементное подмножество n -элементного множества. Если элементы в (n, m) -выборке не могут повторяться, то, очевидно, выполнено неравенство $m \leq n$. Для выборки с повторениями возможно условие $m > n$.

2. Формулы комбинаторики.

В комбинаторике используются формулы для вычисления количества возможных комбинаций и перестановок элементов. Они применяются в задачах, где порядок элементов имеет значение, но используются только частичные наборы, а также в ситуациях, где порядок не играет роли.

Перестановки.

Комбинации из n – элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются **перестановками (P_n)**.

Формула: $P_n = n!$,

где n – число элементов, входящих в каждую перестановку.

Задача. Сколько существует четырехзначных чисел, состоящих из цифр 1, 3, 5 и 7 (без повторений).

Решение. $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Размещения.

Комбинации из n –элементов, по m – элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами, или порядком элементов, называются

размещениями: (A_n^m) : $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, $m \leq n$

Задача. Сколько вариантов можно составить для расстановки 2 студентов на 4 свободных места?

Решение. $A(4, 2) = 4! / (4 - 2)! = 4 \times 3 = 12$ — существует 12 вариантов размещения двух студентов.

Сочетания.

Комбинации, составленные из данных n – элементов по m - элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом, называются **сочетаниями (C_n^m)**

Формула: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Задача. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из пяти имеющихся?

Решение. $C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \dots = 10$.

3. Правила комбинаторики.

При решении комбинаторных задач часто применяются два важных правила.

Правило сложения: Если некоторый элемент «*a*» можно выбрать *m* числом способов, а другой элемент «*b*» – *n* числом способов, то выбор элемента «**либо *a*, либо *b***» можно сделать **(*m* + *n*)** числом способов.

Задача. В группе 20 девушек и 5 юношей. Каким числом способов можно выбрать старосту?

Решение. Старостой может быть выбрана одна из 20 девушек или один из 5 юношей, а значит, общее число способов выбора старосты равно $20+5=25$.

При использовании правила суммы в такой формулировке нужно следить, чтобы ни один из способов выбора объекта *A* не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта *B*. Если такие совпадения есть, то правило суммы утрачивает силу и получается лишь $(m+n-k)$ способов выбора, где *k*-число совпадений.

Задача. В техникуме работают 76 преподавателей. Из них 49 знают английский язык, 32 - немецкий и 15 - оба языка. Сколько преподавателей не знает ни английского, ни немецкого языков?

Решение. Английский или немецкий язык знают $49 + 32 - 15 = 66$ преподавателей. А значит, не знают ни одного из этих языков $77 - 66 = 10$ преподавателей.

Правило умножения: Если некоторый элемент «*a*» можно выбрать *m* числом способов, а затем элемент «*b*» – *n* числом способов, то выбор пары «*a* и *b*» можно осуществить **(*m*·*n*)** числом способов.

Задача. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Старостой может быть выбран любой из 30 учащихся, т.е. существует 30 способов выбора старосты. После того как староста уже выбран, профоргом можно выбрать любого из оставшихся 29 учащихся. Таким образом, одному способу выбора старосты соответствуют 29 способов выбора профорга. Следовательно, общее число способов выбора старосты и профорга равно $30 \cdot 29 = 870$.

Правила сложения и умножения имеют место для любого конечного числа элементов.

Задача. Сколько трёхзначных чётных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6, если цифры могут повторяться?

Решение. При составлении трёхзначного числа *abc* из данных цифр вместо *a* можно взять любую цифру, кроме нуля (6 возможностей), вместо *b* можно взять любую из них (7 возможностей), вместо *c* можно взять любую из цифр 0,2,4,6 (4 возможности). Т.о., согласно правилу умножения, имеем $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$ способов составить число, удовлетворяющее условию задачи.

Часто при решении комбинаторных задач работают оба правила.

Задача. Имеются 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать два изделия одного сорта. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. По правилу умножения, два изделия 1-го сорта можно выбрать $20 \cdot 19 = 380$ способами. Аналогично. Два изделия 2-го сорта можно выбрать $30 \cdot 29 = 870$ способами. Т.к. по условию задачи следует выбрать два изделия одного сорта, неважно какого, то общее число способов выбора изделий одного сорта равно $380 + 870 = 1250$.

Задача. Сколько однозначных, двузначных и трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3, если цифры могут повторяться?

Решение. Очевидно, что из данных цифр можно составить только одно четное однозначное число – 2.

При составлении двузначного числа ab из данных цифр вместо a можно взять любую цифру, кроме нуля (3 возможности), вместо b можно взять любую из цифр 0 и 2 (2 возможности). Т.о., согласно правилу умножения, имеем $3 \cdot 2 = 6$ способов составить нужное нам число.

При составлении трехзначного числа abc из данных цифр вместо a можно взять любую цифру, кроме нуля (3 возможности), вместо b можно взять любую из них (4 возможности), вместо c можно взять любую из цифр 0 и 2 (2 возможности). Т.о., согласно правилу умножения, имеем $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ способа составить число, удовлетворяющее условию задачи.

Применяя правило сложения, получим: $1 + 6 + 24 = 31$.

4. Типы комбинаторных задач.

В комбинаторике выделяют три основных типа комбинаторных задач: *перестановки, сочетания и размещения*. Каждый из типов делится на два подтипа: *задачи без повторений и задачи с повторениями*.

Соединения без повторений.

Каждая конкретная комбинация, составленная из элементов данного конечного множества, называется **выборкой** или **соединением**.

При этом если выбирают m элементов из n различных элементов, то говорят, что они образуют соединение из n элементов по m . В зависимости от того, входят в соединение все n элементов или только их часть, а так же от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, различают 3 вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещения без повторений.

Размещениями из n элементов по m ($0 \leq m \leq n$) называются соединения, содержащие m различных элементов и отличающиеся или составом, m или порядком их расположения.

Обозначение: (A_n^m) («а из эн по эм»)

Формула подсчета $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$,

Перестановки без повторений.

Размещения из n элементов по n называются **перестановками из n элементов**.

Обозначение: P_n («пэ из эн»)

Так как любая перестановка содержит все n элементов, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Формула подсчета: $P_n = n!$

Сочетания без повторений.

Сочетаниями из n элементов по m ($0 \leq m \leq n$) называются соединения m различных элементов, отличающиеся лишь составом (порядок не играет роли).

Обозначение: C_n^m («цэ из эн по

Формула подсчета: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Соединения с повторениями.

Пусть дано множество $M = \{a_1, \dots, a_n\}$. Из данных n элементов составим комбинацию, в которой a_1 встречается m_1 раз, a_2 – m_2 раз и так далее до a_n , который встречается m_n раз. Обозначим $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Размещения с повторениями

В случае размещений какие-то m_i могут оказаться равны нулю, поэтому m может оказаться как меньше n , так и равно или больше n .

Обозначение: $\widetilde{A}_n^m$.

$$\widetilde{A}_n^m = n^m$$

Формула подсчета:

Задача. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1 и 2?

Решение. $\widetilde{A}_2^3 = 2^3 = 8 \quad (111, 112, \dots)$

Перестановки с повторениями

В случае перестановок в соединении присутствуют все n элементов, поэтому m обязательно больше n . Если $m = n$, то каждый элемент встречается ровно один раз, что соответствует перестановкам без повторений/

Число всех перестановок из m элементов с повторениями принято обозначать $\widetilde{P}_{m_1, m_2, \dots, m_n}$.

Формула подсчета:

$$\widetilde{P}_{m_1, m_2, \dots, m_n} = \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!}$$

Задача. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если 1 встречается 1 раз, 2 – 2 раза, 3 – 2 раза?

Решение. $\widetilde{P}_{1, 2, 2} = \frac{(1 + 2 + 2)!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 30$

Сочетания с повторениями

$\widetilde{C}_n^m$.

Число сочетаний из n элементов по m с повторениями обозначают

Формула подсчета:

$$\widetilde{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

Задача. Имеются конфеты трёх сортов в коробках. Сколько можно составить различных наборов из пяти коробок?

Решение. $\widetilde{C}_3^5 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \dots = 21$

Лекция 6**ТЕМА: «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»**

Содержание Лекции:

1. **Виды событий.**
2. **Произведение, сумма и разность событий.**
3. **Случайное событие и его вероятность. Классическое определение вероятности.**
4. **Статистическое определение вероятности.**
5. **Теоремы сложения и умножения вероятностей.**
6. **Формула полной вероятности. Формула Байеса.**
7. **Повторные испытания. Формула Бернулли.**

1. Виды событий.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ — наука о вычислении вероятностей случайных событий.

— Основными объектами изучения теории вероятностей являются:

— случайное событие и его вероятностная характеристика.

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются **испытанием**.

Результат (исход) испытания называется **событием**. События обозначаются **$A, B, C, \dots$** . Событие **A** называется **случайным**, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет.

Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет при данных условиях.

Два события называются **совместимыми**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

События называются **несовместимыми**, если в результате данного испытания они не могут произойти вместе.

Противоположным к **A** событием называется событие, состоящее в не появлении события **A** и обозначается **$\bar{A}$** .

2. Произведение, сумма и разность событий.

Суммой событий **A** и **B** называется событие **$C = A + B$** , состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий **A** или **B** .

Произведением событий **A** и **B** называется событие **$C = A * B$** , состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие **A** и **B** .

Разностью событий **A** и **B** , называется событие **$C = A - B$** , происходящее когда происходит **A** , но не происходит **B** .

3. Случайное событие и его вероятность. Классическое определение вероятности.

Событие **A** называется **случайным**, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Определение 1. Говорят, что совокупность событий образует **полную группу событий** для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них. Например, попадание в цель и промах при одном выстреле.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий $U_1, U_2, \dots, U_n$, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий $U_1, U_2, \dots, U_n$ равновозможно.

Определение 2. События $U_1, U_2, \dots, U_n$, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть **элементарными событиями**.

Определение 3. Событие A называется **благоприятствующим** событию B , если наступление события A влечет за собой наступление события B .

Определение 4. (классическое определение вероятности). Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A , к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad 0 \leq m \leq n; \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

4. Статистическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны. В таких случаях используется так называемое статистическое определение вероятности.

Пусть произведено n – испытаний, при этом некоторое событие A наступило m – раз.

Определение 1. Число m называется **абсолютной частотой** (или просто частотой) события A , а отношение $P^*(A) = \frac{m}{n}$ называется **относительной частотой** события A .

При проведении серий из n – испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением n – числа испытаний в сериях – относительная частота приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимает все более устойчивые значения.

Определение 2. (статистическое определение вероятности). Вероятностью события A в данном испытании называется число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n .

Относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью в статистическом смысле, если число испытаний достаточно велико.

5. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Вероятность достоверного события = 1.

Вероятность невозможного события = 0.

Вероятность события, противоположного событию A , равна: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий. Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместимых событий. Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Определение 1. Два события A и B называются **независимыми**, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае, A и B называются **зависимыми**.

Определение 2. Пусть A и B - зависимые события. **Условной вероятностью $P_A(B)$** события B называется вероятность события B , найденная в предположении, что событие A уже наступило. Если A и B независимые, то $P_A(B) = P(B)$;

Условная вероятность находится по формуле: $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Теорема умножения вероятностей двух зависимых событий. Вероятность умножения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность умножения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Формула полной вероятности.

Пусть событие A может произойти лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу событий. События $B_1, B_2, \dots, B_n$ будем называть **гипотезами** для события A . Тогда

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Вероятность события A , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A) \quad (*)$$

где $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$.

Равенство (*) называют **формулой полной вероятности**.

Формула Байеса.

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по **формулам Байеса**:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(A)}, \quad (k = \overline{1, n})$$

7. Повторные испытания. Формула Бернулли.

Независимые события – такие события, вероятности наступления которых не зависят от появления друг друга.

Бинарный случайный опыт (испытание) — это эксперимент или действие, результат которого можно классифицировать как одно из двух возможных исходов: **успех** или **неудача**. Такие испытания также называют **испытаниями Бернулли**.

Успех (p) — это вероятность наступления события, которое рассматривается как положительный исход. **Неудача (q)** — это вероятность противоположного исхода, то есть не наступления успеха. Сумма вероятностей двух исходов бинарного испытания равна единице: $p + q = 1$, поэтому $q = 1 - p$.

Чтобы в испытании было действительно два возможных события, обычно полагают, что $0 < p < 1$ (и $0 < q < 1$).

Независимые испытания — это опыты, в которых результат одного никак не влияет на результаты последующих. Серию таких опытов называют **повторными независимыми испытаниями**.

Серия испытаний до первого успеха — это опыт, в котором одинаковые испытания проводятся до наступления первого успеха. Как только успех случился, испытания прекращаются.

Пользуясь правилом умножения, можно найти вероятность каждого элементарного события: $P(Y) = p$, $P(HY) = qp$, $P(HHY) = q^2 p$, $P(HHHY) = q^3 p$ и так далее.

Вероятность элементарного события $HHH...H Y$, в котором перед успехом случилось ровно k неудач, равна: $P(HHH...H Y) = q^k p$

Некоторые примеры серии испытаний до первого успеха:

- Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл.
- Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не сойдёт её.

Случайные опыты, в которых много элементарных событий, часто можно свести к изучению испытаний Якоба Бернулли, который триста лет назад изучал серии подобных опытов и внес неоценимый вклад в развитие теории вероятностей.

Испытанием Бернулли или просто испытанием называют случайный опыт, который может закончиться одним из двух элементарных событий.

Серией независимых испытаний Бернулли (схемой повторных независимых испытаний) называют **одинаковые и независимые испытания, проведённые определённое количество раз** (несколько раз). Испытания не зависят друг от друга.

Условия испытаний Бернулли:

1. У каждого испытания должны быть два исхода: успех и неудача.
2. В каждом опыте вероятность события A должна оставаться неизменной.
3. Результаты опытов должны быть независимыми.

Примеры:

- многократное извлечение из урны одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета кладётся обратно в урну;
- повторение одним стрелком выстрелов по одной и той же мишени при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле принимается одинаковой.

Формула Бернулли

Вероятность того, что в n — независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно m —раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$, C_n^m — число сочетаний из n — элементов по m , $P_n(m)$ — вероятность появления m раз события A при n повторных испытаниях.

Вероятность того, что событие наступит:

а) менее m — раз; б) более m — раз; в) не менее m — раз; г) не более m — раз — находят соответственно по формулам:

$$а) P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1);$$

$$б) P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n)$$

$$в) P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n)$$

$$2) P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m).$$

Применение схемы Бернулли в спорте.

Схема Бернулли (схема повторных независимых испытаний) применяется в спорте для анализа задач, в которых один и тот же опыт повторяется неоднократно, а интересует не результат каждого опыта, а общее число появлений события в серии опытов. Например:

- **Повторение одним стрелком выстрелов по одной и той же мишени** при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле принимается одинаковой.
- **Серия матчей между двумя командами**, где в каждом матче результат (победа одной или другой команды) — случайная величина с определёнными вероятностями. Схема Бернулли позволяет моделировать серию как последовательность случайных величин, подчиняющихся распределению Бернулли.

Лекция 7

ТЕМА: «ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ»

Содержание Лекции:

1. Основные понятия математической статистики.

2. Виды шкал.

3. Типы данных.

4. Правила ранжирования.

5. Генеральная совокупность и выборка. Требования к выборке. Классификация выборки.

6. Способы первичного описания данных (вариационный ряд распределения и интервальный вариационный ряд). Графическое представление данных.

7. Методы описательной статистики.

1. Основные понятия математической статистики.

Статистика — наука, изучающая количественные показатели развития общества. Она представляет собой отрасль знаний, которая исследует совокупности массовых однородных явлений. Особенность этих явлений заключается, с одной стороны, в том, что они однородны, а с другой — отличаются друг от друга количественными показателями. Например, исследуя большую группу спортсменов одного возраста, пола, спортивной квалификации стажа, необходимо измерить величину максимального потребления кислорода. В первом случае мы получим массовые однородные показатели, а во втором — индивидуальные показатели, где каждый показатель максимального потребления кислорода соответствует конкретному спортсмену и отличается один от другого.

Таким образом, **объектом исследования статистики** будут массовые однородные явления, которые отличаются друг от друга, или, как принято говорить в статистике, варьируют по единичному показателю.

Предметом исследования статистики является оценка статистических совокупностей, где применяют специальные математико-статистические методы, которые имеют определённую цель при обработке своих результатов, а именно измерения массовых статистических совокупностей заменяются такими показателями, от применения которых не

происходит или почти не происходит потеря исходной информации. Таким образом, большие совокупности чисел заменяются несколькими параметрами, несущими в себе всю исходную информацию.

Сжатие информации до обозримых размеров позволяет проанализировать исследуемое явление и дать ему адекватную оценку, что невозможно осуществить при рассмотрении всей статистической совокупности. Кроме того, выявление параметров совокупности в ряде случаев позволяет установить природную закономерность в оценке исходных данных, как в части ее конкретного анализа, так и при ее сравнении с другими совокупностями. Все эти рассуждения имеют место в практике спортивных исследований. За редким исключением исследования в физической культуре и спорте основаны на наблюдениях, эксперименте и тестировании. Значительная часть научных методов опирается на результаты измерений больших групп спортсменов. Так, изначально практика физической культуры и спорта располагает исходными данными в виде статистической совокупности, где ее единичные показатели отражают достижения конкретного спортсмена, а их варьирование свидетельствует об индивидуальном различии спортсменов по измеряемому показателю.

Статистическое исследование — это сложный и продолжительный процесс, он позволяет получить представление о том или ином явлении, изучить его размер, уровень, выявить закономерности. Выделяют три основных этапа статистических исследований:

1. *Статистическое наблюдение*, которое представляет собой планомерный и систематический процесс сбора данных, характеризующих изучаемый объект. Чаще всего оно преследует практическую цель — получение достоверной информации для выявления закономерностей развития явлений и процессов.

Оно должно удовлетворять следующим требованиям:

— объекты наблюдения (в нашем случае испытуемые) должны быть одинаковыми (однородными) с точки зрения их свойств (квалификация, специализация, возраст, стаж занятий и др.);

— число объектов наблюдения должно быть достаточным, чтобы можно было выявить закономерности и обобщить их свойства.

2. *Статистическая сводка и группировка результатов наблюдения*. Они являются важной подготовительной частью к статистическому анализу данных. Этот этап предусматривает:

— систематизацию (группировку) данных;

— оформление определенных статистических таблиц.

3. *Анализ статистического материала*. Статистический анализ является заключительной стадией статистического исследования. В процессе статистического анализа исследуются структура, динамика и взаимосвязи явлений или процессов. Его проводят с использованием соответствующих математико-статистических методов.

Параметры, измеряемые в физической культуре и спорте

Наличие различных приборов и технических устройств, применяемых в исследованиях специалистами педагогических, биомедицинских и психологических дисциплин спорта, позволяет получать информацию более чем о трех тысячах отдельных параметров.

Все параметры, измеряемые в науке о спорте, подразделяются на четыре уровня:

— *интегральные*, отражающие суммарный (кумулятивный) эффект функционального состояния различных систем организма (например, спортивное мастерство);

— *комплексные*, относящиеся к одной из функциональных систем организма спортсмена (например, физическая подготовленность);

- *дифференциальные*, характеризующие только одно свойство системы (например, силовые качества);
- *единичные*, раскрывающие одну величину (значение) отдельного свойства системы (максимальная сила мышц).

Основными измеряемыми и контролируемыми параметрами в спортивной медицине, тренировочном процессе и научных исследованиях по физической культуре и спорту являются следующие:

- *физиологические («внутренние»), физические («внешние») и психологические параметры тренировочной нагрузки и восстановления;*
- *параметры качеств силы, быстроты, выносливости, гибкости и ловкости;*
- *функциональные параметры сердечно-сосудистой и дыхательной систем;*
- *биомеханические параметры спортивной техники;*
- *параметры размеров тела.*

Для изучения этих параметров и контроля над ними широко используется большое количество разнообразных способов, приемов и методов измерений следующих физических величин:

- *силовых* (это причины, вызывающие изменения в скорости и направлении движения тела: силы отталкивания, деформации, удары, броски и т. п.; моменты сил и моменты вращения: раскачивания, размахивания, обороты и вращения при выполнении локомоторных и гимнастических упражнений; давление на спортивные снаряды и т. п.);
- *величин, относящихся к скорости* (расход количества энергии в течение заданного времени; скорость разгона, перемещения, остановки и изменения направления в двигательных действиях; ускорение линейное и угловое при выполнении упражнений);
- *временных* (промежутки времени и частота действий в единицу времени, момент времени, длительность действия, ритм движений);
- *геометрических* (положение спортсмена — координаты расположения тела или его звеньев в заданной системе; размеры — расстояния между двумя заданными точками при измерении результатов в прыжках, метаниях и др., контуров или форм при измерении правильности вычерчивания обязательных фигур в фигурном катании; при измерении осанки и др.);
- *характеризующих физические свойства* (плотность, удельный вес тела человека; измерения влажности в спортивной гигиене; вязкость, твердость, пластичность костно-мышечной системы);
- *количественных* (масса и вес тела и отдельных его звеньев);
- *характеризующих химический состав;*
- *тепловых* (температура тела и его теплопроводная способность, определяемая количеством тепла, выделяемого или поглощаемого телом при определенных условиях);
- *радиационных* (ядерная радиация — радиоизотопные методы измерения массы отдельных звеньев тела человека и сканирование; определение костного возраста юных спортсменов; фотометрические измерения скелета и т. п.);
- *электрических* (биопотенциалы различных органов: сердца, мышц, мозга и т. п.).

Одним из перспективных подходов к решению проблемы выявления наиболее информативных параметров и методов обследований спортсменов служит метод моделирования различных сторон подготовленности, основная цель которого — определение и научное обоснование конкретных количественных модельных характеристик функциональной, технико-тактической, психологической подготовленности, при достижении которых данный спортсмен с наибольшей степенью вероятности может выиграть данные соревнования или установить рекорд.

2. Виды шкал.

Используя различные приборы и устройства, исследователь постоянно работает со шкалами.

Шкала — элемент счетной системы, посредством которого происходит отнесение исследуемого объекта к определенной группе объектов.

Понятие «шкала» употребляется в двух значениях. Во-первых, на шкале фиксируются показания отсчетного устройства прибора.

В этом смысле шкала содержит набор определенных условных знаков. Указатель прибора, останавливаясь на каком-либо знаке, фиксирует изменение тех или иных измеряемых параметров.

Например, шкала амперметра представляет собой линейку с делениями, каждое из которых соответствует определенному количеству ампер. Остановившись на делении 2А, указатель фиксирует силу тока в сети, равную двум амперам.

Промежуток между соседними отметками шкалы называется делением шкалы.

Цена шкалы — это значение измеряемой величины, соответствующее расстоянию между двумя ее соседними делениями.

Шкала представляет собой определенную систему, осуществляющую классификацию объектов. В этом смысле шкал может быть множество в зависимости от количества упорядочивающих систем. В спортивной практике наибольшее распространение получили четыре шкалы измерений: шкала наименований, шкала порядка, шкала интервалов, шкала отношений. Каждая из них специфична, имеет свое практическое приложение, способ и принцип измерения, свой набор математических операций.

Выделяют четыре типа измерительных шкал:

- 1) Шкала наименований (номинальная, номинативная, категориальная);
- 2) Шкала порядка (ранговая, ординальная);
- 3) Шкала интервалов;
- 4) Шкала отношений (абсолютная шкала).

} Метрические шкалы

Шкала наименований (номинальная шкала). Это шкала, в которой не выражены количественные характеристики объектов. Учитывается только то свойство объектов, что они разные. Эта шкала используется для классификации объектов (например, нумерация игроков футбольной команды). Числа, составляющие шкалу наименований, разрешается менять местами. При использовании шкалы наименований могут проводиться только некоторые математические операции: ее числа нельзя складывать и вычитать, но можно подсчитывать, сколько раз (как часто) встречается то или иное число.

Шкала порядка — это ряд натуральных чисел, расположенных в восходящем или нисходящем порядке. Существуют виды спорта, где результат спортсмена определяется только местом, занятым на соревнованиях (например, единоборства). После таких соревнований ясно, кто из спортсменов сильнее, а кто слабее. Но насколько сильнее или слабее, сказать нельзя. Если три спортсмена заняли соответственно первое, второе и третье места, то каковы их различия в спортивном мастерстве, остается неясным: второй спортсмен может быть почти равен первому, а может быть существенно слабее его и быть почти одинаковым с третьим. Места, занимаемые в шкале порядка, называются рангами, а сама шкала называется ранговой. В такой шкале составляющие ее числа упорядочены по рангам, то есть занимаемым местам, но интервалы между ними измерить точно нельзя. В отличие от шкалы наименований, шкала порядка позволяет не только установить факт равенства или неравенства измеряемых объектов, но и определить характер неравенства в виде суждений: «больше — меньше», «лучше — хуже» и т. п. с помощью шкал порядка можно измерять качественные, не имеющие строгой количественной меры показатели.

Шкала интервалов. В этой шкале числа не только упорядочены по рангам, но и разделены определенными интервалами. Особенность, отличающая ее от шкалы отношений, состоит в том, что нулевая точка выбирается произвольно. Примерами могут быть календарное время (начало летоисчисления в разных календарях устанавливалось по случайным причинам), суставной угол (угол в локтевом суставе при полном разгибании предплечья может приниматься равным либо нулю, либо 180°), температура и др. результаты измерений по шкале интервалов можно обрабатывать всеми математическими методами, кроме вычисления отношений. Данные шкалы интервалов дают ответ на вопрос «насколько больше?», но не позволяют утверждать, что одно значение измеренной величины во столько-то раз больше или меньше другого. Например, если температура повысилась с 10° до 20° по Цельсию, то нельзя сказать, что стало в два раза теплее.

Шкала отношений отличается тем, что в ней строго определено положение нулевой точки. Благодаря этому она не накладывает никаких ограничений на математический аппарат, используемый для обработки результатов наблюдений. В спорте по шкале отношений измеряют расстояние, силу, скорость и десятки других переменных. По шкале отношений измеряют и те величины, которые образуются как разности чисел, отсчитанных по шкале интервалов. Так, календарное время отсчитывается по шкале интервалов, а интервалы времени — по шкале отношений. При использовании шкалы отношений измерение какой-либо величины сводится к экспериментальному определению отношения этой величины к другой подобной, принятой за единицу. Измеряя длину прыжка, можно узнать, во сколько раз эта длина больше длины другого тела, принятого за единицу длины (метровой линейки в частном случае); взвешивая штангу, можно определить отношение ее массы к массе другого тела — гире весом в килограмм и т. п. если ограничиться только применением шкал отношений, то можно дать другое определение измерению: измерить какую-либо величину — значит найти опытным путем ее отношение к соответствующей единице измерения.

3. Типы данных.

Данные — это основные элементы, подлежащие классифицированию или разбитые на категории с целью обработки. Выделяют три типа данных.

1. **Номинативные данные:** категориальные (качественные) данные, представляющие собой особые свойства элементов выборки. Например, цвет глаз у испытуемых. Эти данные нельзя измерить, но можно оценить частоту встречаемости. Если возможны только два значения номинативных параметров (например, выполнил тест — не выполнил тест), то такие данные называются бинарными.

2. **Ранговые данные,** соответствующие местам этих элементов в последовательности, полученной при их расположении в возрастающем порядке. Их можно представить в виде порядковой шкалы. В таблицах эти данные предлагается обозначать как x_r .

3. **Метрические данные:** количественные данные, получаемые при измерениях и выраженные в соответствующих единицах (кг, IQ, тестовые баллы и т.д.). Их можно распределить на шкале интервалов или отношений. В таблицах их предлагается обозначать как x_i .

4. Правила ранжирования.

Использование порядковой шкалы позволяет присваивать ранги объектам по какому-либо признаку. Таким образом, метрические значения переводятся в ранговые. При этом фиксируются различия в степени выраженности свойств. В процессе ранжирования следует придерживаться двух правил.

Правило порядка ранжирования. Надо решить, кто получает первый ранг: объект с самой большей степенью выраженности какого-либо качества или наоборот. Чаще всего это

абсолютно безразлично и не отражается на конечном результате. Традиционно принято первый ранг приписывать объектам с большей степенью выраженности качества (большему значению – меньший ранг). Например, чемпиону присуждают первое место, а не наоборот. Хотя и здесь если бы был принят обратный порядок, то конечные статистические выводы от этого не изменились бы. Так что порядок ранжирования каждый исследователь вправе определять сам.

Допустим, имеется неупорядоченный массив, данные которого необходимо проранжировать: {2, 7, 6, 8, 11, 15, 9}. После упорядочивания массива ранжируем его.

Варианты ранжирования

Принцип: большему значению - меньший ранг

Метрические данные (X_i)	15	11	9	8	7	6	2
Ранги (X_r)	1	2	3	4	5	6	7

Принцип: большему значению - больший ранг

Метрические данные (X_i)	15	11	9	8	7	6	2
Ранги (X_r)	7	6	5	4	3	2	1

Существует группа редко используемых непараметрических критериев, при работе с которыми меньшему значению необходимо всегда приписывать меньший ранг. К таковым относятся *T-критерий Вилкоксона*, *U-критерий Манна-Уитни*.

Правило связанных рангов. Объектам с одинаковой выраженностью свойств приписывается один и тот же ранг. Этот ранг представляет собой среднее значение тех, рангов, которые они получили бы, если бы не были равны. Например, надо проранжировать массив, содержащий ряд одинаковых метрических данных: {4, 5, 9, 2, 6, 5, 9, 7, 5, 12}. После упорядочивания массива следует вычислить среднее арифметическое значение связанных рангов.

Ранжирование связанных рангов

Метрические данные (X_i)	Предварительное ранжирование (X_{R1})	Окончательное ранжирование (X_r)
12	1	1
9	2	$(2+3)/2=2,5$
9	3	$(2+3)/2=2,5$
7	4	4
6	5	5
5	6	$(6+7+8)/3=7$
5	7	$(6+7+8)/3=7$
5	8	$(6+7+8)/3=7$
4	9	9
2	10	10

5. Генеральная совокупность и выборка. Требования к выборке. Классификация выборки.

В математической статистике выделяют два фундаментальных понятия: генеральная совокупность и выборка.

Совокупностью – называется практически счетное множество некоторых объектов или элементов, интересующих исследователя.

Свойством совокупности называется реальное или воображаемое качество, присущее некоторым всем ее элементам. Свойство может быть случайным или неслучайным.

Параметром совокупности называется свойство, которое можно квантифицировать в виде константы или переменной величины.

Простая совокупность характеризуется:

- отдельным свойством (например: все спортсмены России);
- отдельным параметром в виде константы или переменной (Все спортсмены женского пола);
- системой непересекающихся (несовместных) свойств, к примеру: Все тренеры и спортсмены г.Великие Луки.

Сложная совокупность характеризуется:

- системой, хотя бы частично пересекающихся свойств;
- системой параметров независимых и зависимых в совокупности; при комплексном исследовании личности.

Гомогенной или однородной называется совокупность, все характеристики которой присущи каждому ее элементу;

Гетерогенной или неоднородной называется совокупность, характеристики которой сосредоточены в отдельных подмножествах элементов.

Важным параметром является *объем совокупности* – количество образующих ее элементов. Величина объема зависит от того, как определена сама совокупность, и какие вопросы нас конкретно интересуют. Допустим, нас интересует эмоциональное состояние студента 1-го курса в период сдачи конкретного экзамена в сессию. Тогда генеральная совокупность исчерпывается в течении получаса. Если нас интересует эмоциональное состояние всех студентов 1-го курса, то совокупность будет гораздо больше, и еще больше, если взять эмоциональное состояние всех студентов 1-го курса данного вуза и т.д. Понятно, что совокупности большого объема можно исследовать только выборочным путем.

Выборкой называется некоторая часть генеральной совокупности, то, что непосредственно изучается.

Требования к выборке:

1. Однородность. Выбор осуществляется на основаниях: возраст, спортивный разряд и т.п.

2. Репрезентативность. Качество выборки, позволяющее распространять полученные на ней выводы на всю генеральную совокупность. Выборка должна адекватно отображать генеральную совокупность, иначе результаты не совпадут с целями исследования.

Выборки классифицируются по *репрезентативности, объему, способу отбора и схеме испытаний*.

Репрезентативность зависит от объема, чем больше объем, тем выборка репрезентативней.

По способу отбора.

Случайная – если элементы отбираются случайным образом. Так как большинство методов математической статистики основывается на понятии случайной выборки, то естественно выборка должна быть случайной.

Неслучайная выборка:

- **механический отбор**, когда вся совокупность делится на столько частей, сколько единиц планируется в выборке и затем из каждой части отбирается один элемент;
- **типический отбор** – совокупность делится на гомогенные части, и из каждой осуществляется случайная выборка;

- *серийный отбор* – совокупность делят на большое число разновеликих серий, затем делают выборку одной какой-либо серии;
- *комбинированный отбор* – сочетаются рассматриваемые виды отбора, на разных этапах.

По схеме испытаний – выборки могут быть *независимые и зависимые*. Если процедура эксперимента и полученные результаты измерения некоторого свойства, проведенные на одной выборке, оказывают влияние на другую, то такие выборки называются **зависимыми**. Если процедура эксперимента и полученные результаты измерения некоторого свойства, проведенные на одной выборке, не оказывают влияние на другую, то такие выборки называются **независимыми**.

По объему выборки делят на *малые, средние и большие*. К малым относят выборки, в которых число элементов $n \leq 30$. Средняя выборка удовлетворяет условию $30 \leq n \leq 200$. Понятие большой выборки не определено, но большой считается выборка в которой число элементов $n > 200$. Это деление условно.

Малые выборки используются при статистическом контроле известных свойств уже изученных совокупностей.

Большие выборки используются для установки неизвестных свойств и параметров совокупности.

6. Способы первичного описания данных (вариационный ряд распределения и интервальный вариационный ряд). Графическое представление данных.

Вариационный ряд – упорядоченное отражение распределения значений признака, представляющий двойной ряд чисел и состоящий из обозначения классов и соответствующих частот. В строке признаков можно использовать как уровни градации (степень выраженности), так и метрические данные и диапазоны метрических данных. Сумма частот называется *объемом совокупности*, то есть общим числом исходных данных.

Если признак является непрерывным или число различных значений в выборке велико, вычислять частоту каждого из них не имеет большого смысла. В этом случае составляют интервальный вариационный ряд. Весь промежуток измерения значений выборки, от минимального до максимального, разбивают на частичные интервалы (чаще одинаковой длины), т. е. производится группировка.

Число интервалов следует брать не очень большим, чтобы после группировки ряд не был громоздким, и не очень малым, чтобы не потерять особенности распределения признака.

Выбор числа интервалов группировки

Объем выборки	25-40	40-60	60-100	100-200	более 200
Число интервалов	5-6	6-8	7-10	8-12	10-15

Число интервалов может быть определено по формуле: $m \approx \sqrt{n}$

Затем определяют длину частичного интервала h :

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m},$$

где h – шаг; m – число интервалов.

Строят интервалы. Начало первого интервала x_{h1} выбирается так, чтобы минимальная варианта выборки $x_{\min}$ попадала примерно в середину этого интервала:

$$x_{h1} = x_{\min} - h/2.$$

Промежуточные интервалы получают прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h :

$$x_{hi} = x_{hi-1} + h.$$

Верхняя граница последнего интервала:

$$x_{hm} = x_{max} + h/2.$$

Находят частоты интервалов. **Частота i -го интервала** – это число n_i , показывающее сколько значений признака вписывается в границы данного интервала.

Находят накопленные частоты. **Накопленная частота i -го интервала** – это число, полученное суммированием частот интервалов, начиная от первого и заканчивая i -м включительно:

$$n_{xi} = n_1 + n_2 + \dots + n_i.$$

Вычисляют относительную частоту (частости) каждого интервала. **Относительная частота i -го интервала** – это отношение частоты n_i к объему выборки:

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

Находят накопленные относительные частоты (накопленные частости) каждого интервала. **Накопленная относительная частота i -го интервала** – это число, полученное суммированием относительных частот интервалов, начиная от первого и заканчивая i -м включительно:

$$W_i = w_1 + w_2 + \dots + w_i$$

Полученные данные заносят в таблицу.

Табличное представление данных о результатах

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала	Частота	Накопленная частота	Частость	Накопленная частость

Анализ рядов распределения можно наглядно проводить на основе их графического изображения. Для этой цели строят полигон, гистограмму и кумуляту распределения.

Полигон используется при изображении дискретных вариационных рядов. Для его построения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс в одинаковом масштабе откладываются ранжированные значения варьирующего признака, а по оси ординат наносится шкала для выражения численности каждого варианта, т.е. величины частот.

Полученные на пересечении абсцисс и ординат точки соединяются прямыми линиями, в результате чего получают ломаную линию, называемую полигоном частот. Иногда для замыкания полигона предлагается крайние точки (слева и справа на ломаной линии) соединить с точками на оси абсцисс, в результате чего получается многоугольник.

Гистограмма применяется для изображения интервального вариационного ряда. При построении гистограммы на оси абсцисс откладываются величины интервалов, а частоты изображаются прямоугольниками, построенными на соответствующих интервалах. Высота столбиков должна быть пропорциональна частотам. В результате мы получим график, на котором ряд распределения изображен в виде столбиковой диаграммы.

Гистограмма может быть преобразована в полигон распределения, если середины верхних сторон прямоугольников соединить прямыми.

Для графического изображения вариационных рядов может использоваться кумулятивная кривая. При помощи кумуляты изображается ряд накопленных частот. При построении кумуляты интервального вариационного ряда по оси абсцисс откладываются варианты ряда, а по оси ординат — накопленные частоты — соединяют прямыми и получают ломаную линию, т.е. кумуляту.

Гистограмма

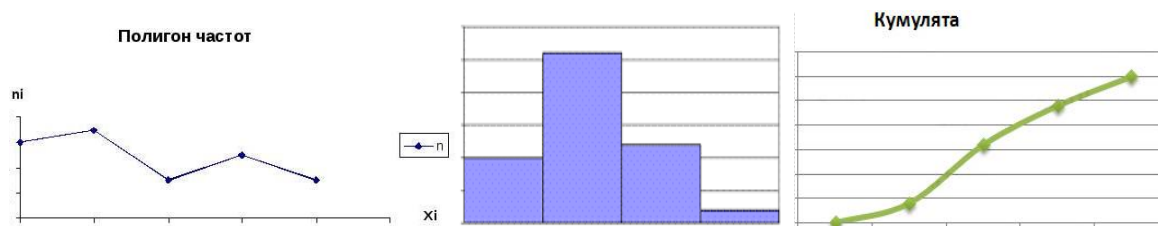


Рисунок –Графическое представление данных

Задача. Дана выборка, состоящая из чисел 1,3,1,2,3,5,1,3,1,2.

Составить вариационный ряд и построить полигон относительных частот.

Решение: Вариационный ряд имеет следующий вид: 1,1,1,1,2,2,3,3,3,5.

Представим данный ряд в виде таблицы (с учетом повторений) и в порядке возрастания значений признака, получим ранжированный вариационный ряд.

Вариационный ряд

x_i	1	2	3	5
n_i	4	2	3	1
w_i	0,4	0,2	0,3	0,1

Полигон относительных частот имеет вид (рис.2):

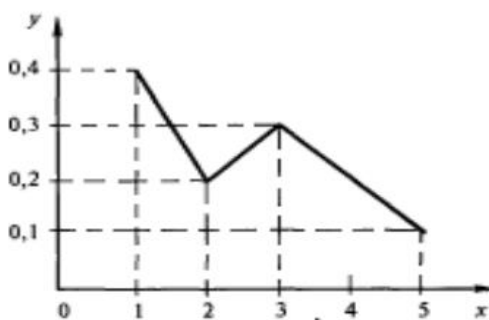


Рисунок –Полигон относительных частот

Задача. При измерении роста девушек некоторого института была получена следующая выборка, объема $n = 30$:

Результаты измерений

178	160	154	183	155	153	167	186	163	155
157	175	170	166	159	173	182	167	171	169
179	165	156	179	158	171	175	173	164	172

Необходимо построить интервальный вариационный ряд и его гистограмму.

Решение: Найдем оптимальное количество интервалов:

$$m = \sqrt{30} \approx 5,48, \text{ т. е. } m = 6 \text{ (см.табл.3).}$$

Длина каждого частичного интервала равна:

$$h = (186 - 153)/6 = 6.$$

Так как наибольшая варианта равна 186, а наименьшая 153, то вся выборка попадает в интервал $[153; 186]$.

$$x_{h1} = x_{\min} - h/2 = 153 - 3 = 150.$$

Получаем следующие шесть интервалов: [150,156);[156,162);[162,168);[168,174);[174,180); [180,186], а соответствующий интервальный вариационный ряд представлен в таблице:

Интервальный вариационный ряд

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала	Частоты	Накопленные частоты	Частости	Накопленные частости
1	[150-156)	153	4	4	0,13	0,13
2	[156-162)	159	5	9	0,17	0,3
3	[162-168)	165	6	15	0,20	0,5
4	[168-174)	171	7	22	0,23	0,73
5	[174-180)	177	5	27	0,17	0,9
6	[180-186]	183	3	30	0,10	1
Σ			30		1	

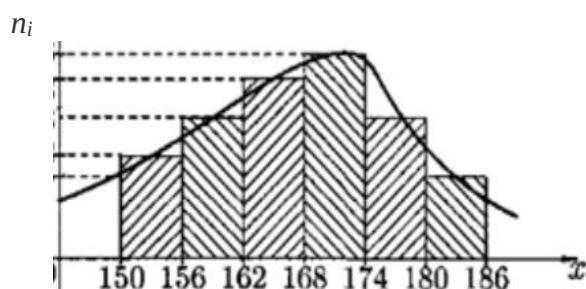


Рисунок –Графическое представление данных

7. Методы описательной статистики.

Меры центральной тенденции.

Наиболее часто в статистике используются три меры центральной тенденции распределения: мода, среднее арифметическое значение и медиана.

Для несгруппированных данных.

Мода – это наиболее часто встречающееся значение в ряду данных.

Например, в следующем массиве данных {2, 3, 5, 1, 4, 5, 6, 5, 2} модой будет являться значение 5 (обозначается: $Mo = 5$).

При расчете моды может возникнуть несколько ситуаций:

1. Два значения признака, стоящие рядом, встречаются одинаково часто. В этом случае мода равна среднему арифметическому этих двух значений. Например, в следующем массиве данных {12, 13, 14, 14, 14, 16, 16, 16, 18, 19} имеем моду:

$$Mo = (14+16)/2 = 15.$$

2. Два значения, встречаются также одинаково часто, но не стоят рядом. В этом случае говорят, что ряд данных имеет две моды, т.е. он бимодальный. Например, в массиве данных { 1, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6} имеем две моды: $Mo_1=5$, $Mo_2=3$.

3. Если все значения данных встречаются одинаково часто, то говорят, что ряд не имеет моды.

Бимодальное или полимодальное (содержащее более двух мод) распределения могут рассматриваться как признак неоднородности выборки.

Среднее арифметическое значение– это отношение суммы всех значений данных к числу слагаемых:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где n – число слагаемых (объем выборки), x_i - индивидуальные значения показателя. Например, рассмотрим массив {8, 9, 11, 12, 12, 13, 14, 17, 19, 19, 20, 20}.

$$\bar{X} = (8 + 9 + 11 + 12 \cdot 2 + 13 + 14 + 17 + 19 \cdot 2 + 20 \cdot 2) / 12 = 14,5.$$

Если в ряду данных присутствуют числа со знаком «минус», то суммирование производится с учетом этих знаков.

Среднее арифметическое значение признака, вычисленное для какой-либо группы, интерпретируется как значение наиболее типичного для этой группы человека. Сравнивая непосредственно средние значения двух или нескольких выборок, мы можем судить об относительной степени развития у людей, составляющих эти выборки, оцениваемого качества.

Медиана разбивает выборку на две равные части (обозначение: Me). Для определения медианы рекомендуется сначала упорядочить данные. Например, для определения значения медианы в массиве {8, 11, 12, 20, 12, 13, 9, 15, 19, 17, 19} необходимо этот массив упорядочить (произвести сортировку по возрастанию): {8, 9, 11, 12, 12, **13**, 15, 17, 19, 19, 20}, следовательно, $Me = 13$. Если количество данных в выборке четное, то медиана равна среднему арифметическому показателю между двумя центральными значениями. Например, в массиве {8, 9, 11, 12, 12, **13, 15**, 17, 19, 19, 20, 20}

$Me = (13 + 15) / 2 = 14$. Медиана может принимать и дробные значения. Место медианы в ранжированном ряду определяют по формуле: $\frac{n+1}{2}$.

Если среднее арифметическое, мода и медиана равны, - ряд симметричный.

Для сгруппированных данных.

Интервал группировки с наибольшей частотой называется *модальным*.

$$Mo = x_{MoH} + h \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})},$$

где x_{MoH} – нижняя граница модального интервала;

h – ширина интервала группировки;

n_{Mo} – частота модального интервала;

n_{Mo-1} – частота интервала, предшествующего модальному;

n_{Mo+1} – частота интервала, следующего за модальным.

Для нахождения медианы, вначале находят интервал группировки, в котором содержится медиана, путем подсчета накопленных частот или накопленных частостей.

Медианным будет тот интервал, в котором накопленная частота впервые окажется больше $n/2$ (n -объем выборки) или накопленная частость – больше 0,5.

Внутри данного интервала медиана определяется по формуле:

$$Me = x_{MeH} + h_{me} \frac{0,5n - n_{x_{Me-1}}}{n_{Me}},$$

где x_{MeH} - нижняя граница медианного интервала;

$0,5n$ – половина объема выборки;

h_{me} – ширина медианного интервала;

n_{xMe-1} – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me} – частота медианного интервала.

Среднее арифметическое находится:

$$\bar{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i, (4)$$

где n – объем выборки;

k – число интервалов группировки;

n_i – частота i -го интервала;

x_i – срединное значение i -го интервала.

Знание моды, медианы, среднего полезно для того, чтобы установить, является ли распределение частных значений изученного признака симметричным и приближающимся к так называемому *нормальному распределению*. Средняя, мода и медиана для нормального распределения обычно совпадают или очень мало отличаются друг от друга.

Меры изменчивости

В качестве наиболее часто используемых мер изменчивости следует назвать *размах, дисперсию, стандартное отклонение*.

Среднее арифметическое дает общую характеристику ряда измерений, являясь важным показателем, поскольку результаты можно сравнивать с данными научно-методической литературы, между группами спортсменов и делать определенные выводы. Однако оно не показывает, как сильно каждый результат отклоняется от среднего значения. Например, вариация результатов кистевой динамометрии в первом случае: 39кг., 40кг., 41кг.; среднее – 40кг. Во втором 20кг., 40кг., 60кг.; среднее – 40кг. В первом случае результаты не существенно отличаются друг от друга, во втором значительно, результат новичка (20кг.) и спортсмена более высокой квалификации (60кг.) Поэтому при обработке результатов выборки необходимо рассчитывать их колеблемость.

Размах – это разница между максимальным и минимальным значениями.

$$R = |X_{\max} - X_{\min}|$$

Для определения размаха выборку необходимо сначала упорядочить. Например, в массиве данных {8, 9, 11, 12, 12, 13, 14, 17, 19, 19, 20, 20} размах будет равен разности между наибольшим и наименьшим значениями, то есть $20 - 8 = 12$. Но если выборка не упорядочена и имеет большой объем, то трудно найти минимальное и максимальное значения.

Однако размах улавливает лишь крайние значения и не отражает отклонений всех результатов.

Дисперсия – это мера разброса данных относительно среднего значения.

Дисперсия для несгруппированных данных:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}, \text{ для } n \leq 30 \text{ и } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}, \text{ для } n > 30$$

Для вычисления дисперсии вручную рекомендуется пользоваться специальной таблицей:

N_i	X_i	$\bar{X}$	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$
-------	-------	-----------	-----------------	---------------------

--	--	--	--	--

Дисперсия для сгруппированных данных:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i}{\sum n_i - 1}, \text{ для } n \leq 30 \text{ и } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}, \text{ для } n > 30$$

Стандартное (среднеквадратическое) отклонение представляет собой квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Стандартное (среднеквадратическое) отклонение также можно вычислить по формуле:

$$\sigma = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{K},$$

где $x_{i \max}$ - наибольший показатель; $x_{i \min}$ - наименьший показатель; K - табличный коэффициент, который находят по специальной таблице), соответствующий числу измерений в группе.

Значения коэффициента K

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	—	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97
10	3,08	3,17	3,26	3,34	3,41	3,47	3,53	3,59	3,64	3,69
20	3,74	3,78	3,82	3,86	3,90	3,93	3,96	4,00	4,03	4,06
30	4,09	4,11	4,14	4,16	4,19	4,21	4,24	4,26	4,28	4,30
40	4,32	4,34	4,36	4,38	4,40	4,42	4,43	4,45	4,47	4,48
50	4,50	4,51	4,53	4,54	4,56	4,57	4,59	4,60	4,61	4,63
60	4,64	4,65	4,66	4,68	4,69	4,70	4,71	4,72	4,73	4,74
70	4,76	4,76	4,78	4,79	4,80	4,81	4,82	4,82	4,84	4,84
80	4,85	4,86	4,87	4,88	4,89	4,90	4,91	4,92	4,92	4,93
90	4,94	4,95	4,96	4,96	4,97	4,98	4,99	4,99	5,00	5,01
100	5,02	5,02	5,03	5,04	5,04	5,05	5,06	5,06	5,07	5,08
110	5,08	5,09	5,10	5,10	5,11	5,11	5,12	5,13	5,13	5,14

Коэффициент вариации определяется как отношение среднего квадратического отклонения к среднему арифметическому, выраженное в процентах:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} * 100\% .$$

Колеблемость результатов измерений можно определить по величине коэффициента вариации. Например, В.Б. Коренберг (2008) для оценки вариативности статистической совокупности предлагает следующие значения: $0\% < V \leq 10\%$ - малая, $10\% < V \leq 20\%$ - средняя, при $20\% < V \leq 33\%$ - большая, а $V > 33\%$ - очень большая.

Коэффициент вариации, являясь относительной величиной (измеряется в процентах), позволяет сравнивать между собой колеблемость результатов исследуемых выборок, имеющих различные единицы измерений. Коэффициент вариации можно использовать в том случае, когда измерения произведены в шкале отношений.

Большинство исследований в области физической культуры и спорта проводятся на выборочном материале. При этом наблюдают относительно малую часть всех возможных случаев, а полученные результаты переносят на всю генеральную совокупность. В таких исследованиях допускается некоторая **ошибка средней арифметической** - показатель рассеивания, которая характеризует колеблемость средней арифметической. Эта ошибка возникает только потому, что не все объекты генеральной совокупности представлены в выборке. Поскольку величина генеральной совокупности, как правило, неизвестна, то для определения средней ошибки на практике применяется следующая формула:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}, \text{ для } n \leq 30 \text{ и } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ для } n > 30,$$

где $\sigma_{\bar{x}}$ - ошибка средней арифметической выборки;

σ - стандартное отклонение;

n - объем выборки.

«Нижняя» и «верхняя» границы средней арифметической с учетом стандартной ошибки:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}.$$

Задача. У десяти гандболистов измерили силу броска (Н): 10,2; 10,3; 11,5; 11,0; 11,5; 11,8; 12,0; 11,5; 10,9; 11,3. Вычислить моду, медиану, среднее арифметическое значение, размах вариации, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации и ошибку выборочного среднего данной выборки. Дать анализ полученных результатов.

Решение. Проранжируем выборку: 10,2; 10,3; 10,9; 11,0; 11,3; 11,5; 11,5; 11,5; 11,8; 12,0.

Мода: $Mo = 11,5$ Н.

Медиана: $Me = (11,3 + 11,5) / 2 = 11,4$ Н.

Среднее арифметическое значение: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{112}{10} = 11,2$ Н.

Основным показателем силы броска мяча является величина 11,2 Н. Поскольку объем выборки мал ($n=10$), моду не рекомендуется использовать для оценки средней результативности. Мода, медиана и среднее арифметическое близки по своим числовым значениям, что говорит о нормальном распределении данных.

Размах вариации: $R = 12,0 - 10,2 = 1,8$ Н. Диапазон рассеивания составляет 1,8 Н.

Вычисление дисперсии

№	X_i	$\bar{X}$	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$
1	10,2	11,2	-1	1
2	10,3	11,2	-0,9	0,81
3	10,9	11,2	-0,3	0,09
4	11,0	11,2	-0,2	0,04
5	11,3	11,2	0,1	0,01
6	11,5	11,2	0,3	0,09
7	11,5	11,2	0,3	0,09
8	11,5	11,2	0,3	0,09
9	11,8	11,2	0,6	0,36
10	12,0	11,2	0,8	0,64
Σ				3,22

$$\text{Дисперсия: } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3,22}{10-1} = 0,36 \text{ Н}^2$$

$$\text{Среднее квадратическое отклонение: } \sigma = \sqrt{0,36} = 0,6 \text{ Н.}$$

Средний разброс результатов по всей группе равен 0,6 Н.

$$\text{Коэффициент вариации: } V = \frac{\sigma}{\bar{x}} * 100\% = \frac{0,6}{11,2} * 100\% = 5,36 \%$$

Так как коэффициент вариации выборки меньше 10 %,- вариативность маленькая, выборку можно считать однородной.

$$\text{Стандартная ошибка среднего арифметического: } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = \frac{0,6}{\sqrt{10-1}} = 0,2 \text{ Н.}$$

«Нижняя» и «верхняя» границы среднего арифметического с учетом стандартного отклонения:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} = 11,2 \pm 0,2.$$

Задача. В условиях предыдущей задачи, для сгруппированных данных вычислить моду, медиану, среднее арифметическое значение, размах вариации, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации и ошибку выборочного среднего данной выборки. Дать анализ полученных результатов.

Решение. Составим таблицу для расчета показателей.

Вычисление дисперсии для сгруппированных данных

Интервалы	Середина интервала, x_i	Частоты, n_i	$x_i \cdot n_i$	Накопленная частота, n_{xi}	$ x_i - \bar{X} $	$(x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i$	Относит. Частота, n_i/n
150 - 156	153	4	612	4	14,6	852,64	0,133
156 - 162	159	5	795	9	8,6	369,8	0,167
162 - 168	165	6	990	15	2,6	40,56	0,2
168 - 174	171	7	1197	22	3,4	80,92	0,233
174 - 180	177	5	885	27	9,4	441,8	0,167
180 - 186	183	3	549	30	15,4	711,48	0,1
Σ		30	5028		544	2497,2	1

$$\text{Среднее арифметическое значение: } \bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{5028}{30} = 167,6$$

В качестве модального интервала выберем интервал [168-174), с наибольшей частотой ($n_i = 7$).

$$Mo = 168 + 6 \cdot \frac{7-6}{(7-6)+(7-5)} = 170.$$

Медиана соответствует варианту, стоящему в середине ранжированного ряда. Медианным является интервал 168 - 174, т.к. в этом интервале накопленная частота, больше медианного номера (медианным называется первый интервал, накопленная частота которого превышает половину общей суммы частот).

$$Me = 168 + 6 \cdot \frac{0,5 \cdot 30 - 15}{7} = 168.$$

Таким образом, 50% единиц совокупности будут меньше по величине 168.

Среднее значение примерно равно моде и медиане, что свидетельствует о нормальном распределении выборки.

Определение моды и медианы графическим способом:

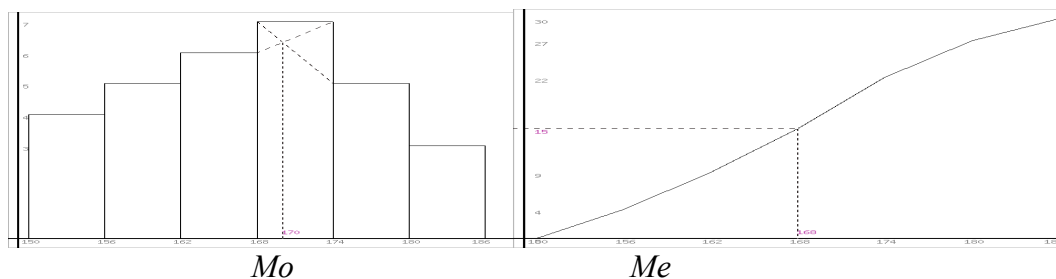


Рисунок –График моды

Рисунок –График медианы

Размах вариации: $R = x_{\max} - x_{\min} = 186 - 153 = 33$

$$\text{Дисперсия: } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i - 1} = \frac{2497,2}{29} = 86,11$$

$$\text{Среднее квадратическое отклонение: } \sigma = \sqrt{86,11} = 9,28$$

Каждое значение ряда отличается от среднего значения 168 в среднем на 9,28.

$$\text{Коэффициент вариации: } V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{9,28}{168} \cdot 100\% = 5,52\%$$

Поскольку $V \leq 10\%$, то совокупность однородна, а вариация слабая. Полученным результатам можно доверять.

$$\text{Стандартная ошибка среднего арифметического: } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = \frac{9,28}{\sqrt{30-1}} = 1,7$$

Лекция 8

ТЕМА: « МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ»

Содержание Лекции:

1. **Статистические гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Статистическая значимость. Принятие и отвержение гипотез.**
2. **Степени свободы. Классификация и назначение критериев.**
3. **Нормальное распределение.**
4. **T-критерий Стьюдента для несвязанных (независимых) измерений.**
5. **T-критерий Стьюдента для связанных (зависимых) измерений**

1. **Статистические гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Статистическая значимость. Принятие и отвержение гипотез.**

Статистической гипотезой называется проверяемое математическими методами предположение относительно статистических характеристик результатов измерений. Статистическую гипотезу обычно обозначают H : (утверждение).

Вопрос проверки гипотез сводится к тому, чтобы определить, является ли расхождение, например средних результатов до и после эксперимента случайностью или это проявление действия определенного фактора, в данном случае экспериментальной ситуации.

Выделяют нулевую и альтернативную гипотезы. **Нулевая гипотеза (H_0)** – гипотеза об отсутствии связи в генеральной совокупности. **Альтернативная (H_1)** – гипотеза о наличии связи.

Ошибка первого рода - это ситуация, когда H_0 отвергается, хотя она, на самом деле, верна.

Ошибка второго рода - это ситуация, когда H_0 принимается, хотя она неверна.

При обосновании вопроса, где проходит линия между принятием и отвержением нулевой гипотезы в силу наличия в эксперименте случайных влияний эта граница не может быть проведена абсолютно точно. Она базируется на понятии уровня значимости.

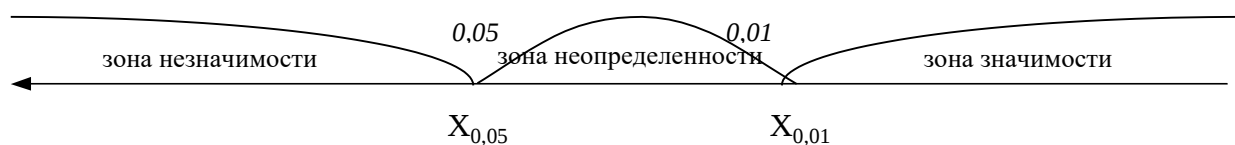
Уровень значимости – это вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы.

В математической статистике, чаще всего, используют три доверительные вероятности: 0,95; 0,99; 0,999 и соответствующие им, уровни значимости: 0,05, 0,01, 0,001. Достаточный уровень значимости равен 0,05, высокий – 0,01, очень высокий – 0,001. Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность того, что нами допущена ошибка и тем надежнее связь.

Уровень $p = 0,05$ – означает, что вероятность допустить ошибку равна пяти ошибкам в выборке из ста элементов (случаев, испытуемых), или одной ошибке в выборке из 20 элементов. Таким образом, больше чем одна ошибка в выборке из двадцати элементов мы сделать не можем.

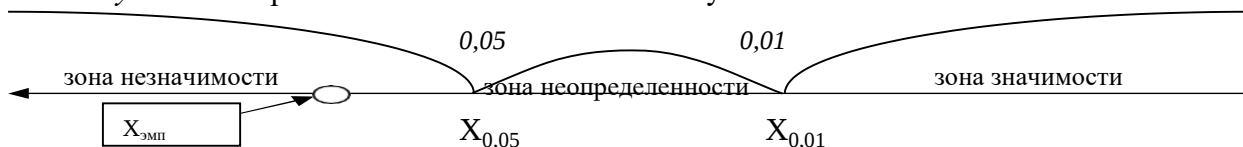
Правило принятия статистического решения: на основании полученных экспериментальных данных исследователь подсчитывает по выбранному им методу эмпирическое значение. Эмпирическое значение сравнивается с критическими, которые соответствуют уровню значимости для выбранного статистического метода. Критические величины находятся для данного статистического метода по соответствующим таблицам, приведенным в приложении к данному пособию. Сравнение полученного эмпирического значения с критическими (табличными) значениями удобно осуществлять с помощью «оси значимости».

«Ось значимости» – это прямая, имеющая три выделенные зоны: зона незначимости, зона неопределенности, зона значимости. Границами трех зон являются критические значения $X_{0,05}$ и $X_{0,01}$ для уровней $p = 0,05$ и $p = 0,01$ соответственно.



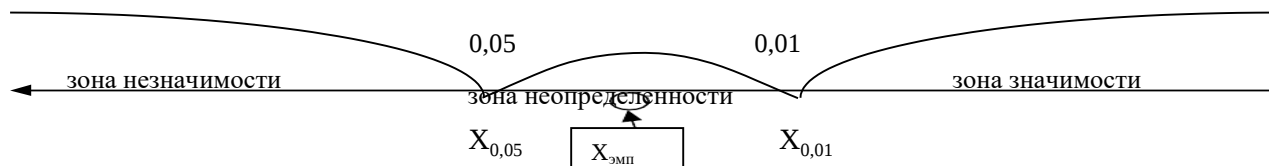
Эмпирическое значение, подсчитанное по какому либо методу должно обязательно попасть в одну из трех зон.

1 случай. Эмпирическое значение попало в зону незначимости:



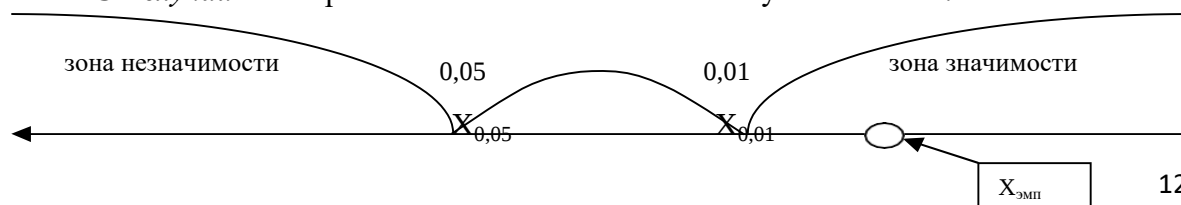
В этом случае *принимается нулевая гипотеза H_0* об отсутствии различий(связи).

2 случай. Эмпирическое значение попало в зону неопределенности:



В этом случае *принимается альтернативная гипотеза H_1* о наличии различий (связи) на уровне значимости $p < 0,05$.

3 случай. Эмпирическое значение попало в зону значимости:



В этом случае *принимается альтернативная гипотеза H_1* о наличии различий (связи) на уровне значимости $p < 0,01$.

При совпадении эмпирического значения с теоретическим принимается альтернативная гипотеза H_1 на уровне значимости $p = 0,05$ или $p = 0,01$.

2. Степени свободы. Классификация и назначение критериев.

Число степеней свободы – это число свободно варьирующих единиц в составе выборки.

Степень свободы обозначается как df или ν .

Число степеней свободы равно числу элементов выборки, из которого вычтено число условий, связывающих данные.

В случае зависимых выборок число степеней свободы равно $n-1$.

Число степеней свободы для независимых выборок будет составлять $(n_1 + n_2) - 2$.

Зная n и/или число степеней свободы, по специальным таблицам можно определить критические значения критерия и сопоставит с ними полученное эмпирическое значение.

3. Нормальное распределение.

Одним из важнейших в математической статистике является понятие *нормального распределения*. Нормальное распределение (называемое также распределением Гаусса), характеризуется тем, что крайние значения признака в нем встречаются достаточно редко, а значения, близкие к средней величине – часто. Нормальное распределение возникает, когда данная случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, каждая из которых играет в образовании всей суммы незначительную роль.

Нормальное распределение имеет колоколообразную форму, значения моды, медианы и среднего арифметического равны между собой. Было установлено, что многие биологические параметры распределены подобным образом (рост, вес и так далее). При этом, чем больше объем выборки, тем более полученное эмпирическое распределение приближается к нормальному.

Характерное свойство нормального распределения состоит в том, что 68,26 % из всех его наблюдений всегда лежат в диапазоне ± 1 стандартное отклонение от среднего арифметического (какова бы ни была величина стандартного отклонения). 95,44 % - в пределах $\pm$ двух стандартных отклонений и 99,72% – в пределах $\pm$ трех стандартных отклонений.

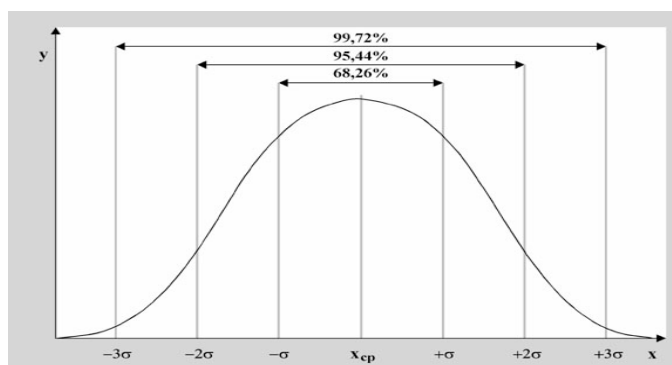


Рисунок – Кривая нормального распределения

Правило трех сигм: $(\bar{X} \pm 3\sigma)$ применяют для выявления сомнительных результатов.

Находится верхняя граница: $\bar{X} + 3\sigma$ и нижняя: $\bar{X} - 3\sigma$. Если в выборке есть результаты лучше чем верхняя граница или хуже чем нижняя граница, то они сомнительны, из выборки их нужно исключить, чтобы получить более объективные данные.

4. Т-критерий Стьюдента для несвязанных (независимых) измерений.

Назначение. Критерий *t*-Стьюдента является параметрическим. Его используют с целью оценки достоверности различий между двумя независимыми выборками. Допускается неравное количество элементов в сравниваемых выборках.

Критерий имеет следующую формулу:

$$t = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}},$$

где $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – средние арифметические рядов X и Y ,

σ_x^2 и σ_y^2 – дисперсии рядов X и Y ,

n_x и n_y – число элементов в выборках X и Y .

Количество степеней свободы для нахождения критического значения критерия вычисляют по формуле:

$$df = n_x + n_y - 2$$

Условия применения:

- Сравнимые значения не составляют пару коррелирующих значений
- Распределение признаков в каждой выборке соответствует нормальному распределению

- Дисперсии признака в выборках примерно равны

Статистические гипотезы:

H_0 : средние значения признака в обеих выборках не различаются

H_1 : средние значения признака в обеих выборках статистически значимо различаются

Алгоритм расчета.

1. Определить *расчетное* значение *t*-критерия
2. Определить *критическое* значение *t*-критерия с использованием таблицы приложения, при заданном уровне значимости и степени свободы.
3. Сравнить *расчетное* и *критическое* значение *t* - критерия.

Если *эмпирическое* значение превышает *критическое* для заданного уровня значимости (0,05, 0,01 или 0,001), то нулевая гипотеза отклоняется и принимается *альтернативная гипотеза*, согласно которой сравниваемые группы различаются.

5. Т-критерий Стьюдента для связанных (зависимых) измерений

Назначение. *t*-критерий Стьюдента является параметрическим и используется с целью оценки достоверности сдвига значений в зависимых выборках.

Метод позволяет проверить гипотезу о том, что средние значения двух генеральных совокупностей, из которых извлечены две сравниваемые зависимые выборки, отличаются друг от друга. Допущение зависимости чаще всего значит, что признак измерен на одной и той же выборке дважды, например, до воздействия и после него.

Формула t-критерия Стьюдента:

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{X}_d}{\sigma_d / \sqrt{n}},$$

где $\bar{X}_d$ – средняя разность значений;

σ_d – стандартное отклонение разностей;

n – количество испытуемых в выборке.

Количество степеней свободы для нахождения критического значения критерия вычисляют по формуле:

$$df = n - 1$$

Статистические гипотезы:

H_0 : сдвиг между показателями недостоверен;

H_1 : сдвиг между показателями достоверен.

Ограничения:

- Сравниваемые значения составляют пару коррелирующих значений
 - Распределения признака и в той, и в другой выборке существенно не отличаются от нормального.

- Дисперсии выборок равны.

- Признак измерен в метрической шкале.

Альтернатива:

непараметрический Т-критерий Вилкоксона (если распределение в выборке не нормальное).

Критические значения критерия t-Стьюдента

	p			p			p	
df	0,05	0,01	df	0,05	0,01	df	0,05	0,01
1	12,706	63,657	23	2,069	2,807	45	2,014	2,690
2	4,303	9,925	24	2,064	2,797	46	2,013	2,687
3	3,182	5,841	25	2,060	2,787	47	2,012	2,685
4	2,776	4,604	26	2,056	2,779	48	2,011	2,682
5	2,571	4,032	27	2,052	2,771	49	2,010	2,680
6	2,447	3,707	28	2,048	2,763	50	2,009	2,678
7	2,365	3,499	29	2,045	2,756	51	2,008	2,676
8	2,306	3,355	30	2,042	2,750	52	2,007	2,674
9	2,262	3,250	31	2,040	2,744	53	2,006	2,672
10	2,228	3,169	32	2,037	2,738	54	2,005	2,670
11	2,201	3,106	33	2,035	2,733	55	2,004	2,668
12	2,179	3,055	34	2,032	2,728	56	2,003	2,667
13	2,160	3,012	35	2,030	2,724	57	2,002	2,665
14	2,145	2,977	36	2,028	2,719	58	2,002	2,663
15	2,131	2,947	37	2,026	2,715	59	2,001	2,662
16	2,120	2,921	38	2,024	2,712	60	2,000	2,660
17	2,110	2,898	39	2,023	2,708	61	2,000	2,659
18	2,101	2,878	40	2,021	2,704	62	1,999	2,657
19	2,093	2,861	41	2,020	2,701	63	1,998	2,656
20	2,086	2,845	42	2,018	2,698	64	1,998	2,655
21	2,080	2,831	43	2,017	2,695	65	1,997	2,654
22	2,074	2,819	44	2,015	2,692	66	1,997	2,652